Exercice 19

Le service qualité d'une entreprise prend au hasard 8 pièces dans le stock de 1000 pièces.

Le stock étant très important, on considère que le tirage est équivalent à des tirages avec remises.

90% des pièces sont sans défaut.

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu'il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

Exercice 19

Le service qualité d’une entreprise prend au hasard 8 pièces dans le stock de 1000 pièces.

Le stock étant très important, on considère que le tirage est équivalent à des tirages avec remises.

90% des pièces sont sans défaut.

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d’avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

au plus 40% (8) = 3,2 pièces défectueuses

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

au plus 40% (8) = 3,2 pièces défectueuses

⇒ au moins 4,8 pièces sans défaut

⇒ p(X …)

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

au plus 40% (8) = 3,2 pièces *défectueuses*

⇒ au moins 4,8 pièces *sans* défaut

⇒ p(X ≥ 4,8) = …

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

au plus 40% (8) = 3,2 pièces *défectueuses*

au moins 4,8 pièces *sans* défaut

$p(X \geq 4{,}8) = p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8)$

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

au plus 40% (8) = 3,2 pièces *défectueuses*

$\Rightarrow$ au moins 4,8 pièces *sans* défaut

$\Rightarrow$ $p(X \geq 4{,}8) = p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8)$

Comment calculer ces 4 probabilités ?

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

au plus 40% (8) = 3,2 pièces *défectueuses*

$\Rightarrow$ au moins 4,8 pièces *sans* défaut

$\Rightarrow$ $p(X \geq 4,8) = p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8)$

Comment calculer ces 4 probabilités ?

$$p(X = k) = (n ; k)\, p^k (1 - p)^{n-k}$$

toujours vraie ?

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

au plus 40% (8) = 3,2 pièces *défectueuses*

⇒ au moins 4,8 pièces *sans* défaut

⇒ $p(X \geq 4{,}8) = p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8)$

Comment calculer ces 4 probabilités ?

$$p(X = k) = (n ; k)\, p^k (1 - p)^{n-k}$$

toujours vraie ?

seulement si la variable aléatoire X suit une loi binomiale

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d’avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d’avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces sans défaut.

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces sans défaut.

La 1ère pièce est piochée dans un stock de 1000 pièces, la 2ème parmi 999, le 3ème parmi 998 etc…

$1000 \approx 999 \approx 998 \Rightarrow$ …

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces sans défaut.

La 1$^{\text{ère}}$ pièce est piochée dans un stock de 1000 pièces, la 2$^{\text{ème}}$ parmi 999, le 3$^{\text{ème}}$ parmi 998 etc…

1000 ≈ 999 ≈ 998 ⟹ on considère que le tirage est équivalent à des tirages avec remises.

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d’avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces sans défaut.

La 1ère pièce est piochée dans un stock de 1000 pièces, la 2ème parmi 999, le 3ème parmi 998 etc…

1000 ≈ 999 ≈ 998 ⇨ on considère que le tirage est équivalent à des tirages avec remises.

La variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres n = … et p = … car :

1) …

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces sans défaut.

La $1^{ère}$ pièce est piochée dans un stock de 1000 pièces, la $2^{ème}$ parmi 999, le $3^{ème}$ parmi 998 etc…

$1000 \approx 999 \approx 998$ etc… $\Rightarrow$ on considère que le tirage est équivalent à des tirages avec remises.

La variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,9$ car :

1) on répète plusieurs fois presque la même expérience.

2) cette expérience n'a que 2 issues (Réussite ou Echec).

3) la variable aléatoire donne le nombre de Réussites.

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

au plus 40% (8) = 3,2 pièces *défectueuses*

⇒ au moins 4,8 pièces *sans* défaut

⇒ $p(X \geq 4{,}8) = p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8)$

La variable aléatoire suit une loi binomiale

de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}9$

⇒ $p(X = k) = (n ; k)\, p^k (1 - p)^{n-k}$

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

au plus 40% (8) = 3,2 pièces *défectueuses*

⇒ au moins 4,8 pièces *sans* défaut

⇒ $p(X \geq 4,8) = p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8)$

La variable aléatoire suit une loi binomiale

de paramètres $n = 8$ et $p = 0,9$

⇒ $p(X = k) = (n ; k)\, p^k (1 - p)^{n-k}$

$= (8 ; k)\, 0,9^k\ 0,1^{8-k}$

$(8 ; k)$ = n^b de branches de l'arbre

donnant k succès

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

$p(X = k) = (n ; k) p^k (1 - p)^{n-k} = (8 ; k) 0{,}9^k \ 0{,}1^{8-k}$

$(8 ; k)$ = n^b de branches de l'arbre donnant k succès

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

$p(X = k) = (n ; k)\ p^{k} (1 - p)^{n-k} = (8 ; k)\ 0{,}9^{k}\ 0{,}1^{8-k}$

$(8 ; k)$ = n^{b} de branches de l'arbre donnant k succès

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d’avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

$$p(X = k) = (n ; k)\ p^{k} (1 - p)^{n - k} = (8 ; k)\ 0{,}9^{k}\ \ 0{,}1^{8 - k}$$

(8 ; k) = n^{b} de branches de l’arbre donnant k succès

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d’avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

$p(X = k) = (n ; k)\ p^k (1 – p)^{n-k} = (8 ; k)\ 0{,}9^k\ \ 0{,}1^{8-k}$

$(8 ; k)$ = n^b de branches de l’arbre donnant k succès

→ 56 branches pour 5 succès

28 branches pour 6 succès

8 branches pour 7 succès

1 branches pour 8 succès

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

	1	8	28	56	70	56	28	8	1
pour	0	1	2	3	4	5	6	7	8 succès

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

$p(X = k) = (n ; k)\, p^k\, (1 – p)^{n – k} = (8 ; k)\, 0{,}9^k\ \ 0{,}1^{8 – k}$

$(8 ; k)$ = n^b de branches de l'arbre donnant k succès

$p(X = 5) = 56 \times 0{,}9^5 \times 0{,}1^3$

$\approx 0{,}033067$

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad \boxed{56 \quad 28 \quad 8 \quad 1}$

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

$p(X = k) = (n ; k)\, p^k (1 - p)^{n-k} = (8 ; k)\, 0{,}9^k\ 0{,}1^{8-k}$

$(8 ; k)$ = n^b de branches de l'arbre donnant k succès

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

1 8 28 56 70 $\boxed{56\ \ 28\ \ 8\ \ 1}$

$p(X = 5) = 56 \times 0{,}9^5 \times 0{,}1^3$

$\approx 0{,}033067$

$p(X = 6) = 28 \times 0{,}9^6 \times 0{,}1^2$

$\approx 0{,}148803$

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

$p(X = k) = (n ; k)\, p^{k}\, (1 - p)^{n-k} = (8 ; k)\, 0{,}9^{k}\ \ 0{,}1^{8-k}$

$(8 ; k)$ = n^{b} de branches de l'arbre donnant k succès

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

$p(X = 5) = 56 \times 0{,}9^{5} \times 0{,}1^{3}$

$\approx 0{,}033067$

$p(X = 6) = 28 \times 0{,}9^{6} \times 0{,}1^{2}$

$\approx 0{,}148803$

$p(X = 7) = 8 \times 0{,}9^{7} \times 0{,}1$

$\approx 0{,}382638$

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

$p(X = k) = (n ; k)\ p^k (1 - p)^{n-k} = (8 ; k)\ 0{,}9^k\ 0{,}1^{8-k}$

$(8 ; k)$ = n^b de branches de l'arbre donnant k succès

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

1 8 28 56 70 $\boxed{56 \quad 28 \quad 8 \quad 1}$

$p(X = 5) = 56 \times 0{,}9^5 \times 0{,}1^3$

$\approx 0{,}033067$

$p(X = 6) = 28 \times 0{,}9^6 \times 0{,}1^2$

$\approx 0{,}148803$

$p(X = 7) = 8 \times 0{,}9^7 \times 0{,}1$

$\approx 0{,}382638$

$p(X = 8) = 1 \times 0{,}9^8 \approx 0{,}430467$

1°) Quelle est (à 0,01 % près) la probabilité d'avoir au plus 40% de pièces défectueuses dans le tirage ?

$p(X = k) = (n\,;\,k)\, p^k (1 - p)^{n-k} = (8\,;\,k)\, 0{,}9^k\ 0{,}1^{8-k}$

$(8\,;\,k)$ = n^b de branches de l'arbre donnant k succès

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

$p(X = 5) = 56 \times 0{,}9^5 \times 0{,}1^3$

$\approx 0{,}033067$

$p(X = 6) = 28 \times 0{,}9^6 \times 0{,}1^2$

$\approx 0{,}148803$

$p(X = 7) = 8 \times 0{,}9^7 \times 0{,}1$

$\approx 0{,}382638$

$p(X = 8) = 1 \times 0{,}9^8 \approx 0{,}430467$ ⇒ $p(X \geq 4{,}8) \approx$ **99,50%**

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu'il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu’il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

au moins 2 pièces *défectueuses* parmi n pièces

$\Rightarrow$ au plus 1 pièce *sans* défaut

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu'il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

au moins 2 pièces *défectueuses* parmi n pièces

⇨ au plus 1 pièce *sans* défaut

$p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu'il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

au moins 2 pièces *défectueuses* parmi n pièces

→ au plus 1 pièce *sans* défaut

$p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$

$= \ldots \quad + \ldots$

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu'il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

au moins 2 pièces *défectueuses* parmi n pièces

$\Rightarrow$ au plus 1 pièce *sans* défaut

$p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$

$= 1 \times 0{,}9^{0} \times 0{,}1^{n} + \dots$

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu'il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

au moins 2 pièces *défectueuses* parmi n pièces

➡ au plus 1 pièce *sans* défaut

$$p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$$

$$= 1 \times 0{,}9^{0} \times 0{,}1^{n} + n \times 0{,}9^{1} \times 0{,}1^{n-1}$$

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu'il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

au moins 2 pièces *défectueuses* parmi n pièces

$\Rightarrow$ au plus 1 pièce *sans* défaut

$p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$

$= 1 \times 0{,}9^0 \times 0{,}1^n + n \times 0{,}9^1 \times 0{,}1^{n-1} \geq 0{,}999$

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu'il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

au moins 2 pièces *défectueuses* parmi n pièces

$\Rightarrow$ au plus 1 pièce *sans* défaut

$p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$

$= 1 \times 0{,}9^0 \times 0{,}1^n + n \times 0{,}9^1 \times 0{,}1^{n-1} \geq 0{,}999$

impossible de résoudre algébriquement

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu'il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

au moins 2 pièces *défectueuses* parmi n pièces

$\Rightarrow$ au plus 1 pièce *sans* défaut

$p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$

$= 1 \times 0,9^0 \times 0,1^n + n \times 0,9^1 \times 0,1^{n-1} \geq 0,999$

impossible de résoudre algébriquement

$\Rightarrow$ calculatrice

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu'il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

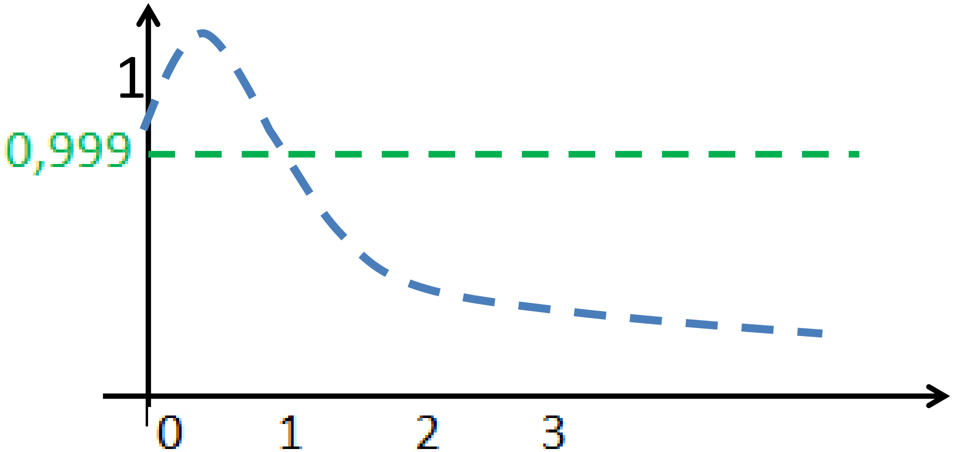
au moins 2 pièces *défectueuses* parmi n pièces

⇒ au plus 1 pièce *sans* défaut

$$p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$$

$$= 1 \times 0{,}9^0 \times 0{,}1^n + n \times 0{,}9^1 \times 0{,}1^{n-1} \geq 0{,}999$$

impossible de résoudre algébriquement



⇒ calculatrice

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu'il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

au moins 2 pièces *défectueuses* parmi n pièces

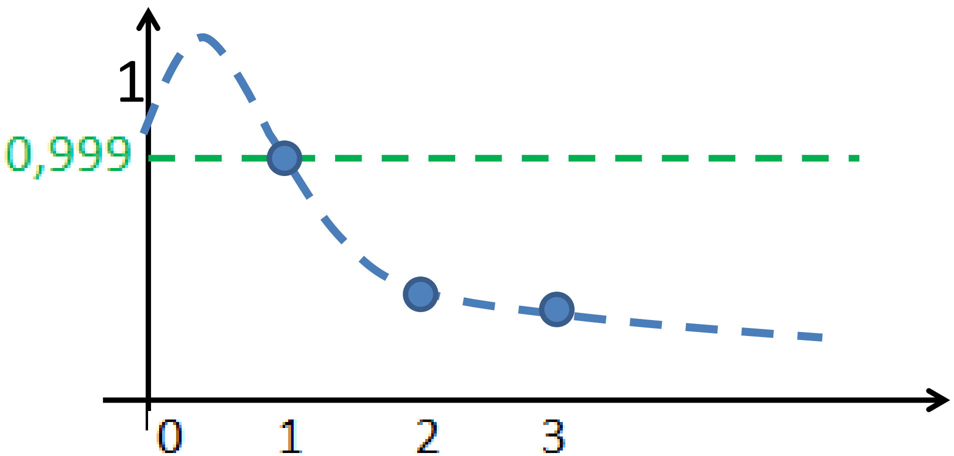
⇒ au plus 1 pièce *sans* défaut

$$p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$$

$$= 1 \times 0{,}9^{0} \times 0{,}1^{n} + n \times 0{,}9^{1} \times 0{,}1^{n-1} \geq 0{,}999$$

impossible de résoudre algébriquement

⇒ calculatrice



n est un entier positif strict

2°) Combien faut-il prendre de pièces dans le stock pour que la probabilité qu'il y en ait au moins 2 défectueuses soit supérieure à 0,999 ?

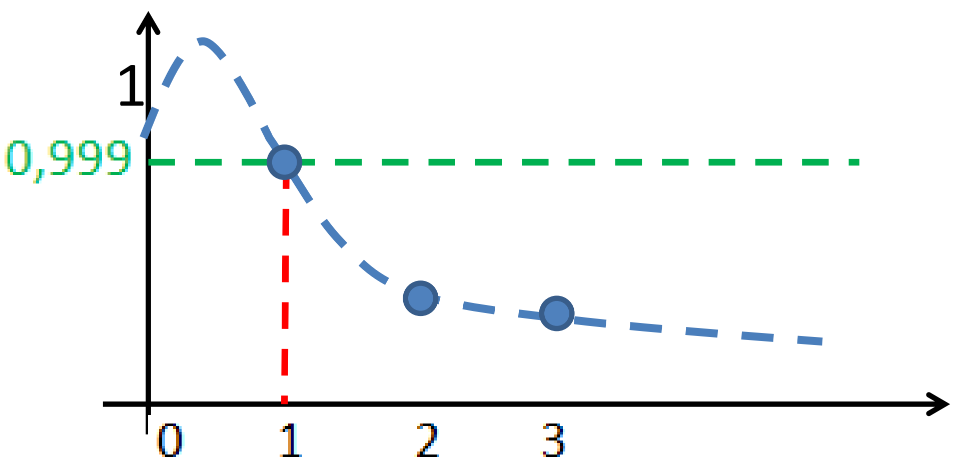
au moins 2 pièces *défectueuses* parmi n pièces

⟹ au plus 1 pièce *sans* défaut

$p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$

$= 1 \times 0{,}9^0 \times 0{,}1^n + n \times 0{,}9^1 \times 0{,}1^{n-1} \geq 0{,}999$

impossible de résoudre algébriquement



⟹ calculatrice

n est un entier positif strict

⟹ n = **1** (unique solution)