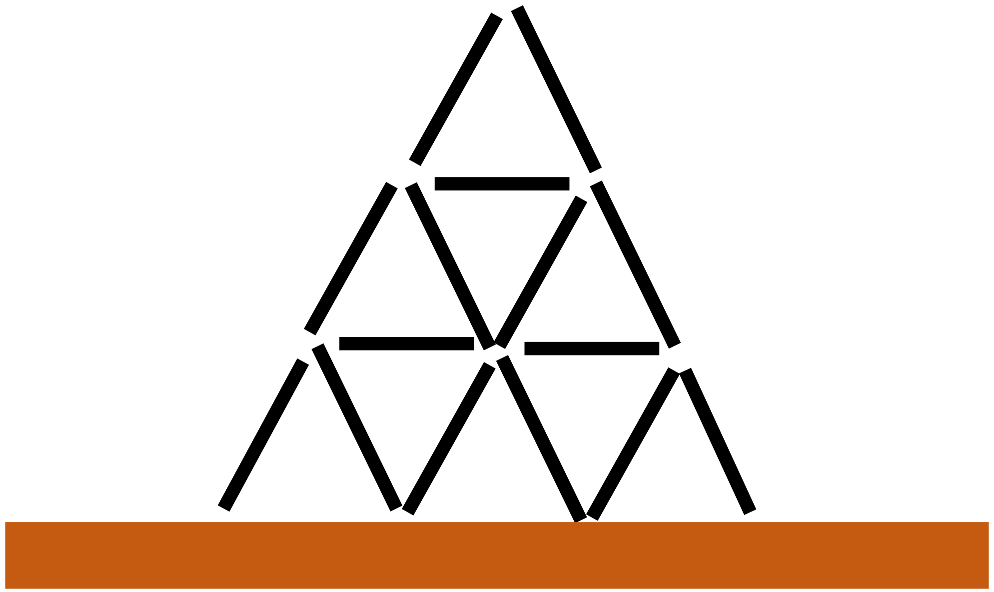
Exercice 21 :

Le plus grand château de cartes construit avec 2000 cartes comporte combien d'étages ?

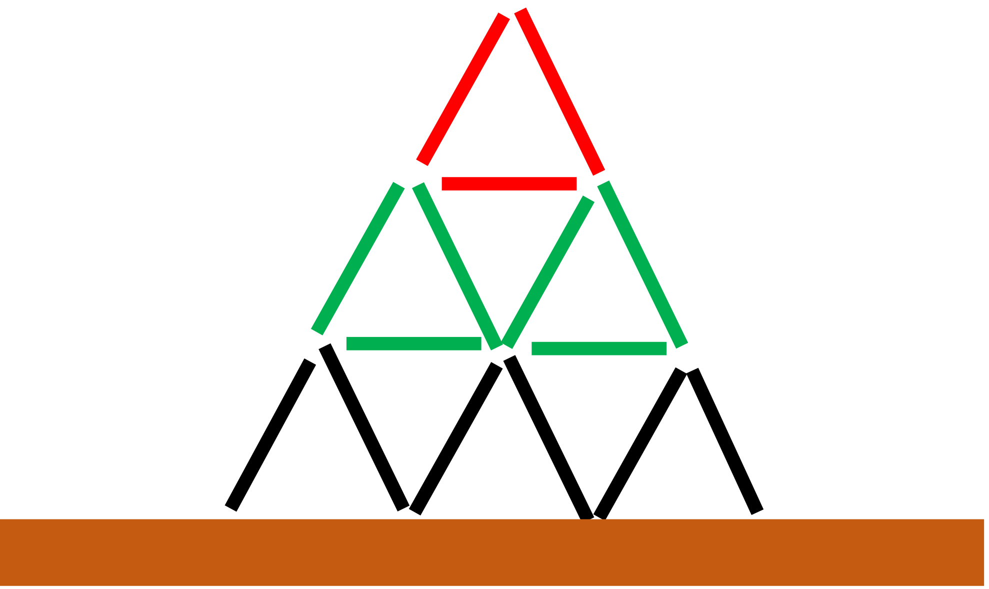


Exercice 21 :

Le plus grand château de cartes construit avec 2000 cartes comporte combien d'étages ?

couche 1 : n^b de cartes $u_1 = 3$

couche 2 : n^b de cartes $u_2 = 6$



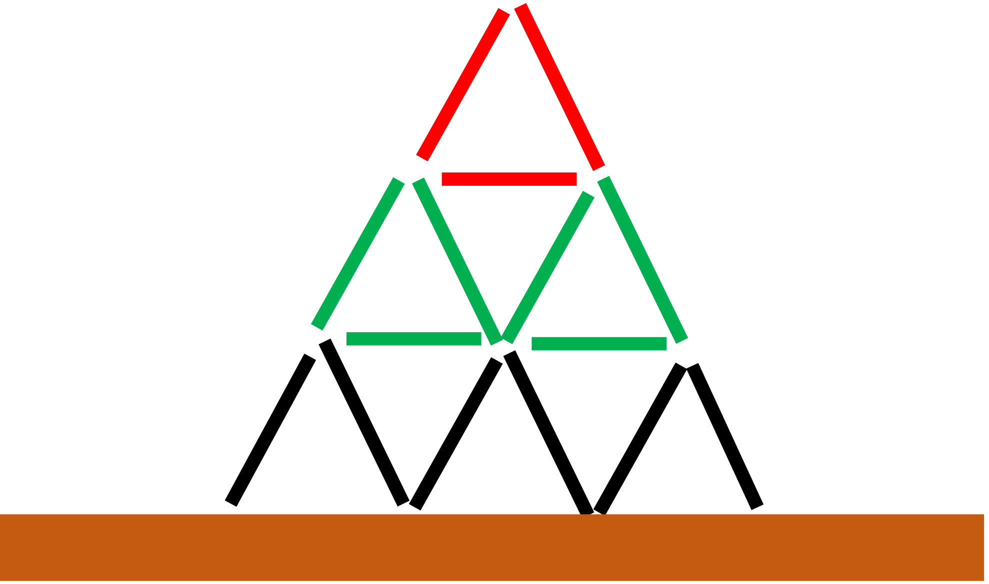
$u_3 = 9$ $u_4 = 12$

etc… mais la dernière couche ne comporte pas de cartes horizontales.

On cherche le plus grand n pour avoir …

Exercice 21 :

Le plus grand château de cartes construit avec 2000 cartes comporte combien d'étages ?



couche 1 : n^b de cartes $u_1 = 3$

couche 2 : n^b de cartes $u_2 = 6$

$u_3 = 9$ $u_4 = 12$

etc… mais la dernière couche ne comporte pas de cartes horizontales.

On cherche le plus grand n

pour avoir $u_1 + u_2 + \ldots + (u_n - n) \leq 2000$

Le plus grand château de cartes construit avec 2000 cartes comporte combien d'étages ?

La suite est …

Le plus grand château de cartes construit avec 2000 cartes comporte combien d’étages ?

La suite est arithmétique car il y a toujours une différence de 3 cartes entre 2 couches voisines (sauf avec la dernière couche).

Le château de cartes comporte le n^b de cartes S = …

Le plus grand château de cartes construit avec 2000 cartes comporte combien d'étages ?

La suite est arithmétique car il y a toujours une différence de 3 cartes entre 2 couches voisines (sauf avec la dernière couche).

Le château de cartes comporte le n^b de cartes S = 3 + 6 + 9 + … + ?

$S = u_1 + u_2 + \ldots + (\ldots. \quad)$

Le plus grand château de cartes construit avec 2000 cartes comporte combien d'étages ?

La suite est arithmétique car il y a toujours une différence de 3 cartes entre 2 couches voisines (sauf avec la dernière couche).

Le château de cartes comporte le n^b de cartes $S = 3 + 6 + 9 + \dots + ?$

$S = u_1 + u_2 + \dots + (u_n – n)$ car la dernière couche n'a pas de cartes horizontales, et que chaque couche i comporte i cartes horizontales.

$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n - n = \dots$

Le plus grand château de cartes construit avec 2000 cartes comporte combien d'étages ?

La suite est arithmétique car il y a toujours une différence de 3 cartes entre 2 couches voisines (sauf avec la dernière couche).

Le château de cartes comporte le n^b de cartes S = 3 + 6 + 9 + … + ?

$S = u_1 + u_2 + \ldots + (u_n - n)$ car la dernière couche n'a pas de cartes horizontales, et que chaque couche i comporte i cartes horizontales.

$$S = \text{nb de termes}\ \frac{1^{er}\ \text{terme} + \text{dernier}}{2} - n = n\,\frac{u_1 + u_n}{2} - n = n\,\frac{3 + 3n}{2} - n$$

On dispose au maximum de 2000 cartes, donc …

Le plus grand château de cartes construit avec 2000 cartes comporte combien d'étages ?

La suite est arithmétique car il y a toujours une différence de 3 cartes entre 2 couches voisines (sauf avec la dernière couche).

Le château de cartes comporte le n^b de cartes $S = 3 + 6 + 9 + \dots + ?$

$S = u_1 + u_2 + \dots + (u_n - n)$ car la dernière couche n'a pas de cartes horizontales, et que chaque couche i comporte i cartes horizontales.

$$S = \text{nb de termes} \; \frac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier}}{2} - n = n \; \frac{u_1 + u_n}{2} - n = n \; \frac{3 + 3n}{2} - n$$

On dispose au maximum de 2000 cartes, donc **$S \leq 2000$**

On doit donc résoudre l'inéquation

$$n\,\frac{3 + 3n}{2} - n \leq 2000$$

je multiplie tout par 2 :

$$n\,(\,3 + 3n\,) - 2n \leq 4000$$

$$\Leftrightarrow \quad n\,(\,3 + 3n\,) - 2n - 4000 \leq 0$$

$$3n + 3n^2 - 2n - 4000 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{3n^2 - n - 4000 \leq 0}$$

$$S \leq 2000 \iff \frac{n(3+3n)}{2} - n \leq 2000$$

J'élimine la difficulté des fractions en multipliant par 2 :

$$\iff n(3+3n) - 2n \leq 4000$$

$$\iff 3n + 3n^2 - 2n - 4000 \leq 0 \iff \mathbf{3n^2 + n - 4000 \leq 0}$$

impossible de rassembler algébriquement n^2 et n

$\Rightarrow$ on utilise sa calculatrice

Le plus grand n satisfaisant l'inéquation est 36

Autre méthode :

S = [½ n (3 + 3n)] – n **≤ 2000**

Soit la fonction f (correspondant au reste des cartes inutilisées) définie sur les réels par f(x) = 2000 – S = …

x	$-\infty$	$+\infty$
f’(x)		
f(x)		

Autre méthode :

$S = [\ \frac{1}{2}\, n\ (\ 3 + 3n\ )\ ] - n \leq 2000$

Soit la fonction f (correspondant au reste des cartes inutilisées) définie sur les réels par $f(x) = 2000 - S = 2000 - \frac{1}{2}\, x(3+3x) + x = 2000 - \frac{1}{2}\, x - 1{,}5x^2$

$f'(x) = \ldots$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$		

Autre méthode :

S = [½ n (3 + 3n)] – n **≤ 2000**

Soit la fonction f (correspondant au reste des cartes inutilisées) définie sur les réels par f(x) = 2000 – S = 2000 – ½ x(3+3x) + x = 2000 – ½ x – 1,5x^2

f'(x) = (0) – ½ (1) – 1,5 (2x) = - ½ – 3x

x	- ∞		- 1/6		+ ∞
f'(x)		+	0	-	
f(x)					

Autre méthode :

S = [½ n (3 + 3n)] – n **≤ 2000**

Soit la fonction f (correspondant au reste des cartes inutilisées) définie sur les réels par $f(x) = 2000 - S = 2000 - \frac{1}{2}x(3+3x) + x = 2000 - \frac{1}{2}x - 1{,}5x^2$

$f'(x) = (0) - \frac{1}{2}(1) - 1{,}5\,(2x) = -\frac{1}{2} - 3x$

Théorème de la monotonie : le sens de variation de f dépend du signe de f’

x	$-\infty$		$-1/6$		$+\infty$
f’(x)		+	0	-	
f(x)		$\nearrow$		$\searrow$	

$S = [\, n\,(3 + 3n)\,/\,2\,] - n \leq 2000$

$f(x) = 2000 - S = 2000 - \frac{1}{2}\,x - 1{,}5x^2$

x est le nombre de couches, donc x est un entier positif ;

f(x) est le nombre de cartes restantes, donc $f(x) \geq 0$

x	$-\infty$		$-1/6$	0 1 2 … 35 36 37 …	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$S = [\, n\,(3 + 3n)/2 \,] - n \leq 2000$

$f(x) = 2000 - S = 2000 - \frac{1}{2}x - 1{,}5x^2$

x est le nombre de couches, donc x est un entier positif ;

f(x) est le nombre de cartes restantes, donc $f(x) \geq 0$

x	$-\infty$		$-1/6$	0	1	2	…	35	36	37 …	$+\infty$
f'(x)		+	0				-				
f(x)		↗		2000	1998	1993	↘	145	38	-72	

$S = [\, n\,(\,3 + 3n\,)\,/\,2\,] - n \leq 2000$

$f(x) = 2000 - S = 2000 - \frac{1}{2}\,x - 1{,}5x^2$

x est le nombre de couches, donc x est un entier positif ;

f(x) est le nombre de cartes restantes, donc $f(x) \geq 0$

x	$-\infty$		$-1/6$	0	1	2	…	35	36	37	…	$+\infty$
$f'(x)$		+	0				-					
$f(x)$				2000	1998	1993		145	38	-72		

donc $f_{mini}(x) \geq 0$

pour $x_{maxi} = 36$

$3^{ème}$ méthode : avec la calculatrice

Menu RUN : on tape Seq (X , X , 1 , 50 , 1) → List 1   qui donne les n de 1 à 50

	List 1		
1	1		
2	2		
3	3		
etc…			
36	36		
37	37		
50	50		

3ème méthode : avec la calculatrice

Menu RUN : on tape Seq (X , X , 1 , 50 , 1) → List 1 qui donne les n de 1 à 50

3 × List 1 → List 2 qui donne les $u_n = 3n$

	List 1	List 2	
1	1	3	
2	2	6	
3	3	9	
etc…			
36	36	108	
37	37	111	
50	50	150	

$3^{ème}$ méthode : avec la calculatrice

Menu RUN : on tape Seq (X , X , 1 , 50 , 1) → List 1 qui donne les n de 1 à 50

3 × List 1 → List 2 qui donne les $u_n = 3n$

Cuml List 2 – List 1 → List 3

qui donne $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n - n$

	List 1	List 2	List 3
1	1	3	2
2	2	6	7
3	3	9	15
etc…			
36	36	108	1962
37	37	111	2072
50	50	150	3775

$3^{ème}$ méthode : avec la calculatrice

Menu RUN : on tape Seq (X , X , 1 , 50 , 1) → List 1 qui donne les n de 1 à 50

3 × List 1 → List 2 qui donne les $u_n = 3n$

Cuml List 2 – List 1 → List 3

qui donne $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n - n$

	List 1	List 2	List 3
1	1	3	2
2	2	6	7
3	3	9	15
etc…			
36	36	108	1962
37	37	111	2072
50	50	150	3775

1962 < 2000

2072 > 2000

donc **36 couches**