Exercice 18

On tire 7 fois avec remise dans une urne contenant 1 jeton Noir et 2 jetons Rouges.

X est la variable aléatoire donnant le nombre de fois où l'on a pioché un jeton noir.

1°) La variable aléatoire suit-elle une loi binomiale ? Quels seraient alors ses paramètres ?

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours, puis vérifiez-la.

3°) Quel est le nombre de jetons noirs que j'aurai le plus de chance de piocher ?

Déterminez à 0,1 % près la probabilité de piocher ce nombre de jetons noirs.

4°) Mettez les valeurs de la variable aléatoire dans un graphe. Quelle est la forme de la courbe ?

5°) Quelle fourchette de jetons noirs doit-on prévoir ?

1°) La variable aléatoire suit-elle une loi binomiale ?

1°) La variable aléatoire suit-elle une loi binomiale ?

La variable aléatoire suit une loi binomiale car :

1) on répète plusieurs fois la même expérience.
2) cette expérience n’a que 2 issues (Réussite ou Echec).
3) la variable aléatoire donne le nombre de Réussites.

1°) La variable aléatoire suit-elle une loi binomiale ?

La variable aléatoire suit une loi binomiale car :

1) on répète plusieurs fois la même expérience.
2) cette expérience n’a que 2 issues (Réussite ou Echec).
3) la variable aléatoire donne le nombre de Réussites.

c’est la répétition d’une expérience de Bernoulli.

1°) La variable aléatoire suit-elle une loi binomiale ? Quels seraient alors ses paramètres ?

La variable aléatoire suit une loi binomiale car :

1) on répète plusieurs fois la même expérience.
2) cette expérience n'a que 2 issues (Réussite ou Echec).
3) la variable aléatoire donne le nombre de Réussites.

➡ c'est la répétition

d'une expérience de Bernoulli.

1°) La variable aléatoire suit-elle une loi binomiale ? Quels seraient alors ses paramètres ?

La variable aléatoire suit une loi binomiale car :

1) on répète plusieurs fois la même expérience.
2) cette expérience n'a que 2 issues (Réussite ou Echec).
3) la variable aléatoire donne le nombre de Réussites.

→ c'est la répétition d'une expérience de Bernoulli.

X suit ß(7 ; ⅓) car n = 7 répétitions

p = 1 jeton noir pour 3 jetons

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours.

X suit une loi binomiale

$\Rightarrow$ $P(X = k) = (n ; k)\, p^k (1 - p)^{n-k}$

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours.

X suit une loi binomiale

$$\Rightarrow P(X = k) = (n ; k)\, p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$= (7 ; k) \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{7-k}$$

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours.

X suit une loi binomiale

$$\Rightarrow P(X = k) = (n ; k)\, p^k (1 - p)^{n - k}$$

$$= (7 ; k) \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{7 - k} = (7 ; k)\, \frac{2^{7 - k}}{3^7}$$

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours.

X suit une loi binomiale

$$\Rightarrow \quad P(X = k) = (n\,;k)\, p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$= (7\,;k)\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{7-k} = (7\,;k)\,\frac{2^{7-k}}{3^7}$$

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours.

X suit une loi binomiale

$$\Rightarrow P(X = k) = (n\,;k)\,p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= (7\,;k)\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{7-k} = (7\,;k)\,\frac{2^{7-k}}{3^7}$$

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

$\Rightarrow$ n^b de branches de l'arbre

1 7 21 35 21 7 1

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours.

X suit une loi binomiale

$$\Rightarrow P(X = k) = (n ; k)\, p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$= (7 ; k) \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{7-k} = (7 ; k) \frac{2^{7-k}}{3^7}$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1 \frac{2^7}{3^7}$	$7 \frac{2^6}{3^7}$	$21 \frac{2^5}{3^7}$	$35 \frac{2^4}{3^7}$	$35 \frac{2^3}{3^7}$	$21 \frac{2^2}{3^7}$	$7 \frac{2^1}{3^7}$	$1 \frac{2^0}{3^7}$

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours.

E(X) $= \Sigma\, p_i\, x_i$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\,\frac{2^7}{3^7}$	$7\,\frac{2^6}{3^7}$	$21\,\frac{2^5}{3^7}$	$35\,\frac{2^4}{3^7}$	$35\,\frac{2^3}{3^7}$	$21\,\frac{2^2}{3^7}$	$7\,\frac{2^1}{3^7}$	$1\,\frac{2^0}{3^7}$

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours.

$$E(X) = \Sigma\, p_i\, x_i = 1\,\frac{2^7}{3^7}\,0 + 7\,\frac{2^6}{3^7}\,1 + 21\,\frac{2^5}{3^7}\,2 + \ldots + 1\,\frac{2^0}{3^7}\,7$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\,\frac{2^7}{3^7}$	$7\,\frac{2^6}{3^7}$	$21\,\frac{2^5}{3^7}$	$35\,\frac{2^4}{3^7}$	$35\,\frac{2^3}{3^7}$	$21\,\frac{2^2}{3^7}$	$7\,\frac{2^1}{3^7}$	$1\,\frac{2^0}{3^7}$

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours.

$$E(X) = \Sigma\, p_i\, x_i = 1\frac{2^7}{3^7}\,0 + 7\frac{2^6}{3^7}\,1 + 21\frac{2^5}{3^7}\,2 + \dots + 1\frac{2^0}{3^7}\,7$$

$$= \frac{5103}{3^7}$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\frac{2^7}{3^7}$	$7\frac{2^6}{3^7}$	$21\frac{2^5}{3^7}$	$35\frac{2^4}{3^7}$	$35\frac{2^3}{3^7}$	$21\frac{2^2}{3^7}$	$7\frac{2^1}{3^7}$	$1\frac{2^0}{3^7}$

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours.

$$E(X) = \Sigma\, p_i\, x_i = 1 \frac{2^7}{3^7}\, 0 + 7 \frac{2^6}{3^7}\, 1 + 21 \frac{2^5}{3^7}\, 2 + \ldots + 1 \frac{2^0}{3^7}\, 7$$

$$= \frac{5103}{3^7} = \frac{7 \times 3^6}{3^7}$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1 \frac{2^7}{3^7}$	$7 \frac{2^6}{3^7}$	$21 \frac{2^5}{3^7}$	$35 \frac{2^4}{3^7}$	$35 \frac{2^3}{3^7}$	$21 \frac{2^2}{3^7}$	$7 \frac{2^1}{3^7}$	$1 \frac{2^0}{3^7}$

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours.

$$E(X) = \Sigma\, p_i\, x_i = 1\,\frac{2^7}{3^7}\,0 + 7\,\frac{2^6}{3^7}\,1 + 21\,\frac{2^5}{3^7}\,2 + \ldots + 1\,\frac{2^0}{3^7}\,7$$

$$= \frac{5103}{3^7} = \frac{7 \times 3^6}{3^7} = \frac{7}{3}$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\,\frac{2^7}{3^7}$	$7\,\frac{2^6}{3^7}$	$21\,\frac{2^5}{3^7}$	$35\,\frac{2^4}{3^7}$	$35\,\frac{2^3}{3^7}$	$21\,\frac{2^2}{3^7}$	$7\,\frac{2^1}{3^7}$	$1\,\frac{2^0}{3^7}$

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours. Vérifiez-la.

$$E(X) = \Sigma\, p_i\, x_i = 1\frac{2^7}{3^7}\,0 + 7\,\frac{2^6}{3^7}\,1 + 21\,\frac{2^5}{3^7}\,2 + \dots + 1\,\frac{2^0}{3^7}\,7$$

$$= \frac{5103}{3^7} = \frac{7 \times 3^6}{3^7} = \frac{7}{3}$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\,\frac{2^7}{3^7}$	$7\,\frac{2^6}{3^7}$	$21\,\frac{2^5}{3^7}$	$35\,\frac{2^4}{3^7}$	$35\,\frac{2^3}{3^7}$	$21\,\frac{2^2}{3^7}$	$7\,\frac{2^1}{3^7}$	$1\,\frac{2^0}{3^7}$

2°) Déterminez l'espérance de la variable aléatoire sans utiliser la formule du cours. Vérifiez-la.

$$E(X) = \Sigma\, p_i\, x_i = 1\,\frac{2^7}{3^7}\,0 + 7\,\frac{2^6}{3^7}\,1 + 21\,\frac{2^5}{3^7}\,2 + \ldots + 1\,\frac{2^0}{3^7}\,7$$

$$= \frac{5103}{3^7} = \frac{7 \times 3^6}{3^7} = \frac{7}{3} = 7\,\frac{1}{3} = n\,p \qquad \text{CQFD}$$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\,\frac{2^7}{3^7}$	$7\,\frac{2^6}{3^7}$	$21\,\frac{2^5}{3^7}$	$35\,\frac{2^4}{3^7}$	$35\,\frac{2^3}{3^7}$	$21\,\frac{2^2}{3^7}$	$7\,\frac{2^1}{3^7}$	$1\,\frac{2^0}{3^7}$

3°) Quel est le nombre de jetons noirs que j’aurai le plus de chance de piocher ?

$E(X) = 7/3 \approx 2{,}33$… donc en moyenne probable je piocherai 2 jetons noirs.

3°) Quel est le nombre de jetons noirs que j'aurai le plus de chance de piocher ?

$E(X) = 7/3 \approx 2{,}33\ldots$ donc en moyenne probable je piocherai 2 jetons noirs.

Prendre le nombre de jetons ayant la plus forte probabilité est faux (en méthode) car…

3°) Quel est le nombre de jetons noirs que j'aurai le plus de chance de piocher ?

$E(X) = 7/3 \approx 2{,}33\ldots$ donc en moyenne probable je piocherai 2 jetons noirs.

Prendre le nombre de jetons ayant la plus forte probabilité est faux (en méthode) car on ne peut éliminer les autres valeurs ayant une probabilité très faible

(très peu probable $\neq$ ne se réalisant pas)

3°) Quel est le nombre de jetons noirs que j'aurai le plus de chance de piocher ?

$E(X) = 7/3 \approx 2,33\ldots$ donc en moyenne probable je piocherai 2 jetons noirs.

Déterminez à 0,1 % près la probabilité de piocher ce nombre de jetons noirs.

3°) Quel est le nombre de jetons noirs que j'aurai le plus de chance de piocher ?

E(X) = 7/3 ≈ 2,33… donc en moyenne probable je piocherai 2 jetons noirs.

Déterminez à 0,1 % près la probabilité de piocher ce nombre de jetons noirs.

X suit une loi binomiale

$\Rightarrow$ $P(\, X = k \,) = (\, n \,;\, k \,)\, p^{k} (1 - p)^{n-k}$

Triangle de Pascal : $(\, 7 \,;\, 2 \,) = 21$ branches de l'arbre.

$P(\, X = 2 \,) = (\, 7 \,;\, 2 \,)\, (\tfrac{1}{3})^{2} (1 - \tfrac{1}{3})^{7-2}$

$= 21\, (\tfrac{1}{3})^{2}\, (\tfrac{2}{3})^{5}$

3°) Quel est le nombre de jetons noirs que j'aurai le plus de chance de piocher ?

$E(X) = 7/3 \approx 2,33\ldots$ donc en moyenne probable je piocherai 2 jetons noirs.

Déterminez à 0,1 % près la probabilité de piocher ce nombre de jetons noirs.

X suit une loi binomiale

$$P(X = k) = (n ; k)\, p^{k} (1 - p)^{n-k}$$

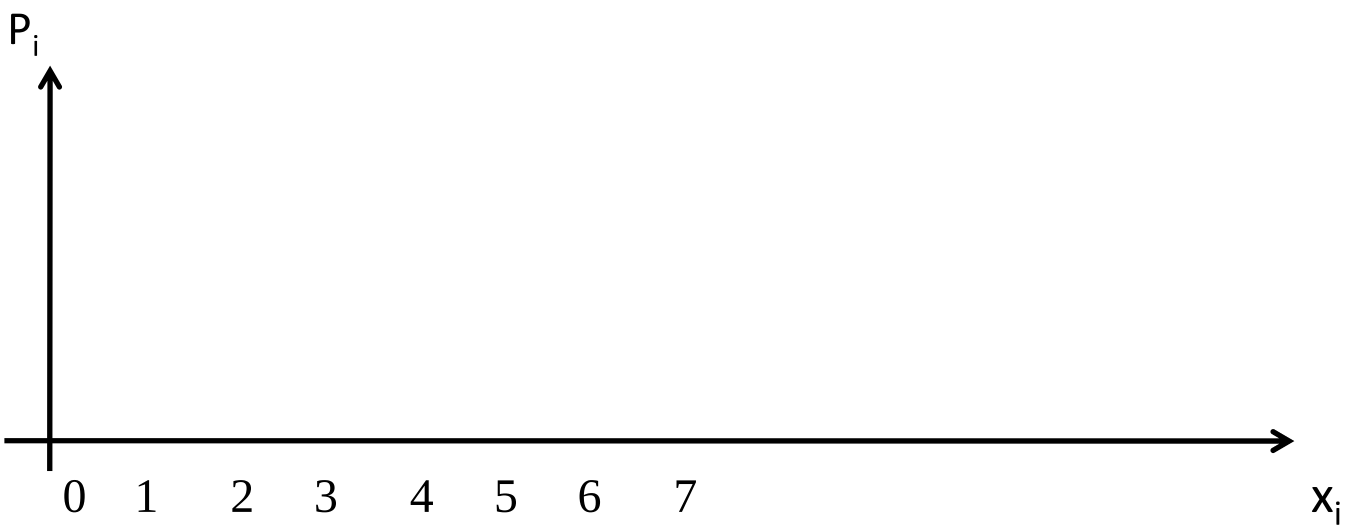
Triangle de Pascal : $(7 ; 2) = 21$ branches de l'arbre.

$$P(X = 2) = (7 ; 2)\, (⅓)^{2} (1 - ⅓)^{7-2}$$

$$= 21\, (⅓)^{2}\, (⅔)^{5} \approx 0,307 = \mathbf{30,7\%}$$

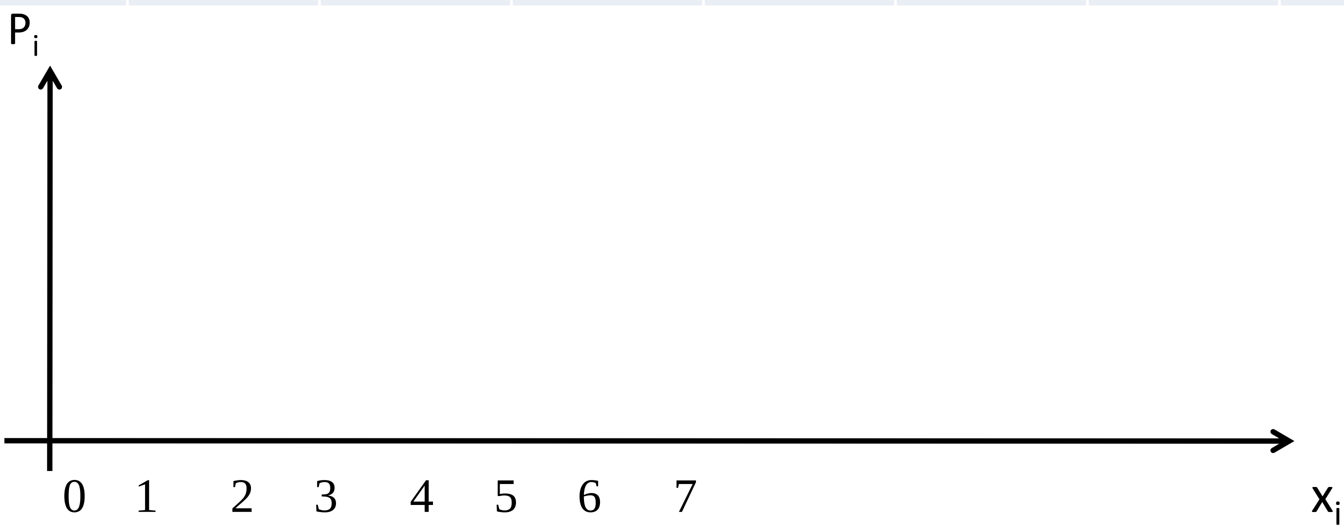
4°) Mettez les valeurs de la variable aléatoire dans un graphe.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\,\frac{2^7}{3^7}$	$7\,\frac{2^6}{3^7}$	$21\,\frac{2^5}{3^7}$	$35\,\frac{2^4}{3^7}$	$35\,\frac{2^3}{3^7}$	$21\,\frac{2^2}{3^7}$	$7\,\frac{2^1}{3^7}$	$1\,\frac{2^0}{3^7}$



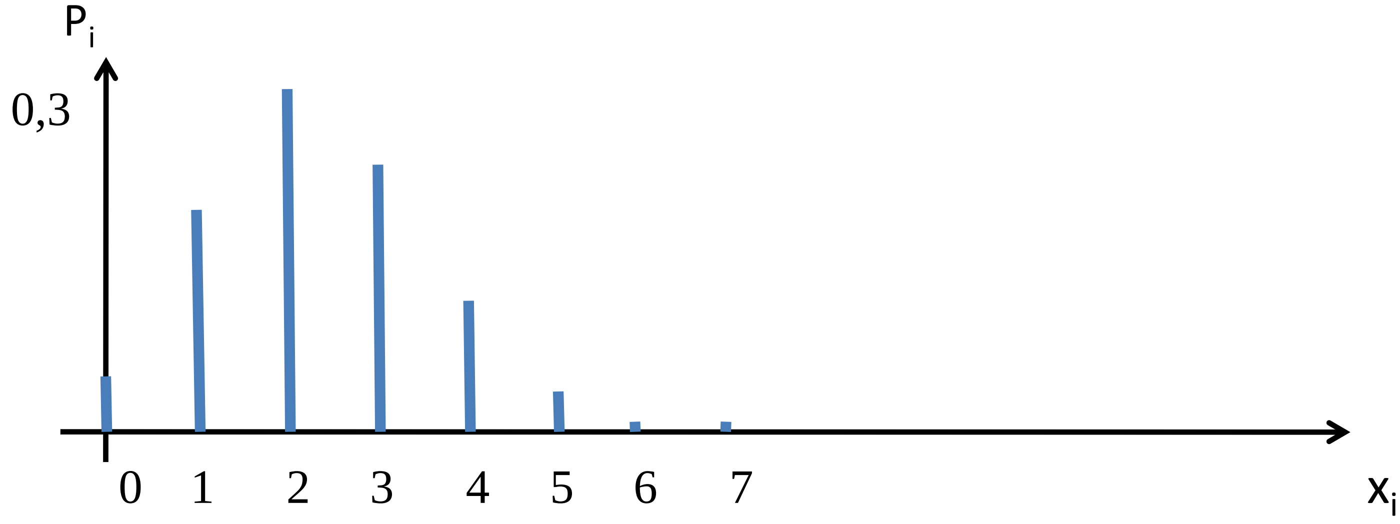
4°) Mettez les valeurs de la variable aléatoire dans un graphe.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\,\frac{2^7}{3^7}$	$7\,\frac{2^6}{3^7}$	$21\,\frac{2^5}{3^7}$	$35\,\frac{2^4}{3^7}$	$35\,\frac{2^3}{3^7}$	$21\,\frac{2^2}{3^7}$	$7\,\frac{2^1}{3^7}$	$1\,\frac{2^0}{3^7}$
≈	0,059	0,205	0,307	0,256	0,128	0,038	0,006	0,0005



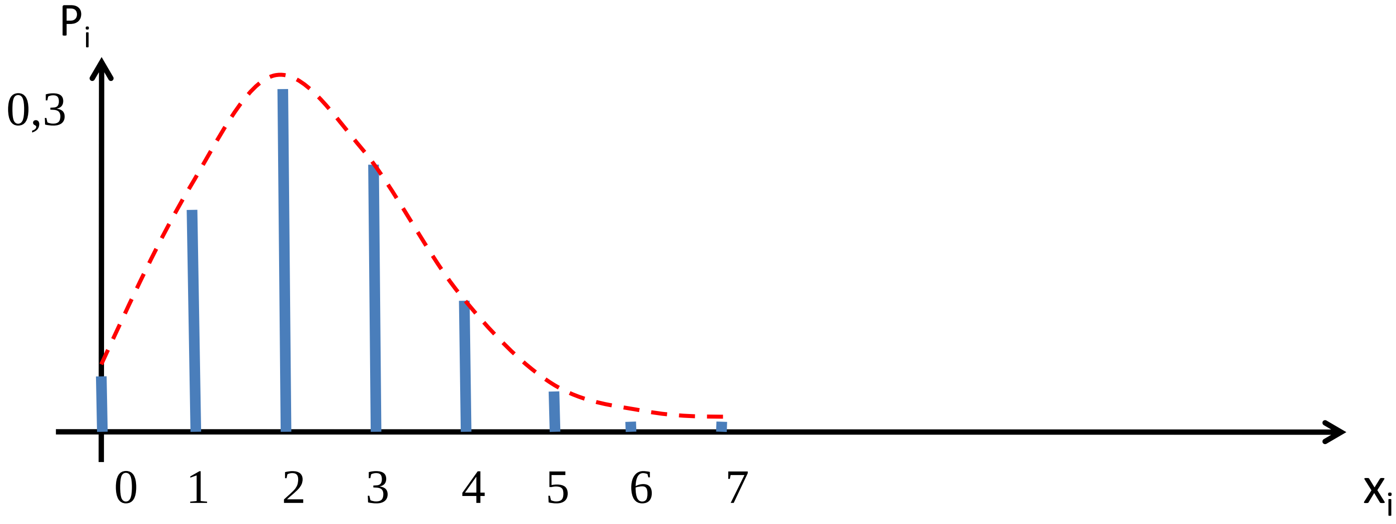
4°) Mettez les valeurs de la variable aléatoire dans un graphe.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\,\frac{2^7}{3^7}$	$7\,\frac{2^6}{3^7}$	$21\,\frac{2^5}{3^7}$	$35\,\frac{2^4}{3^7}$	$35\,\frac{2^3}{3^7}$	$21\,\frac{2^2}{3^7}$	$7\,\frac{2^1}{3^7}$	$1\,\frac{2^0}{3^7}$
≈	0,059	0,205	0,307	0,256	0,128	0,038	0,006	0,0005



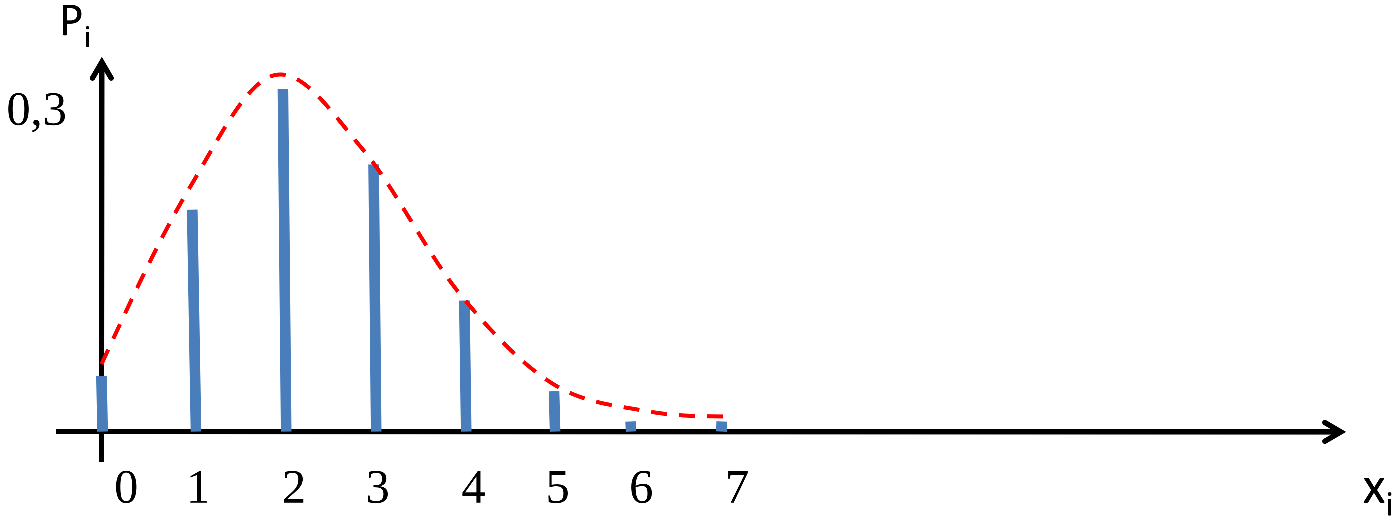
4°) Mettez les valeurs de la variable aléatoire dans un graphe.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\dfrac{2^7}{3^7}$	$7\dfrac{2^6}{3^7}$	$21\dfrac{2^5}{3^7}$	$35\dfrac{2^4}{3^7}$	$35\dfrac{2^3}{3^7}$	$21\dfrac{2^2}{3^7}$	$7\dfrac{2^1}{3^7}$	$1\dfrac{2^0}{3^7}$
≈	0,059	0,205	0,307	0,256	0,128	0,038	0,006	0,0005



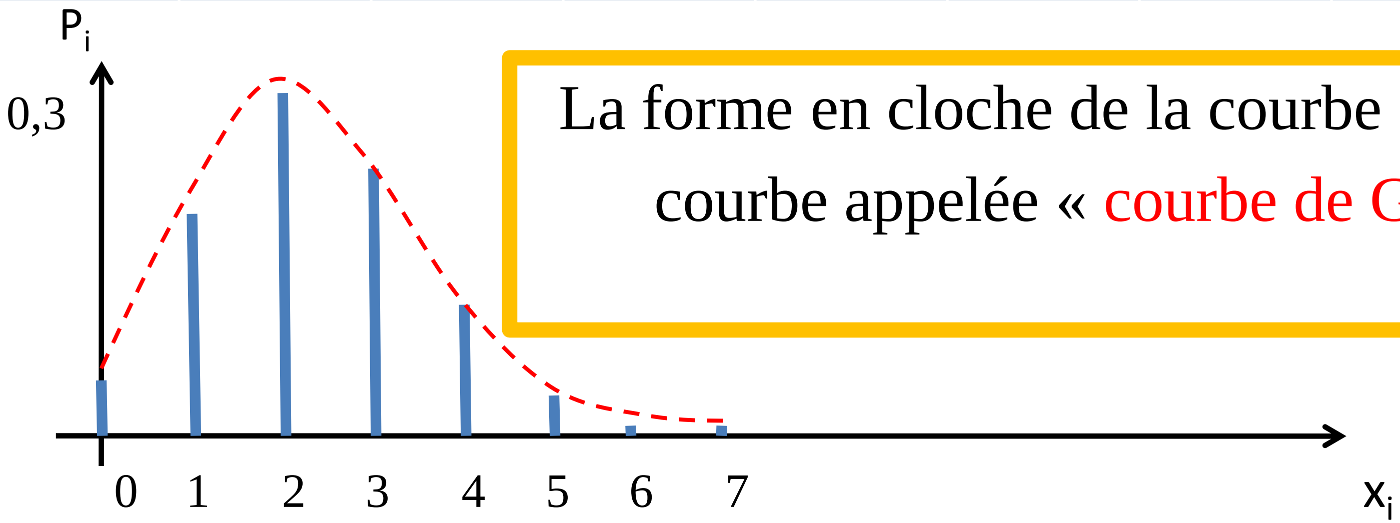
4°) Mettez les valeurs de la variable aléatoire dans un graphe. Quelle est la forme de la courbe ?

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\frac{2^7}{3^7}$	$7\frac{2^6}{3^7}$	$21\frac{2^5}{3^7}$	$35\frac{2^4}{3^7}$	$35\frac{2^3}{3^7}$	$21\frac{2^2}{3^7}$	$7\frac{2^1}{3^7}$	$1\frac{2^0}{3^7}$
≈	0,059	0,205	0,307	0,256	0,128	0,038	0,006	0,0005



4°) Mettez les valeurs de la variable aléatoire dans un graphe. Quelle est la forme de la courbe ?

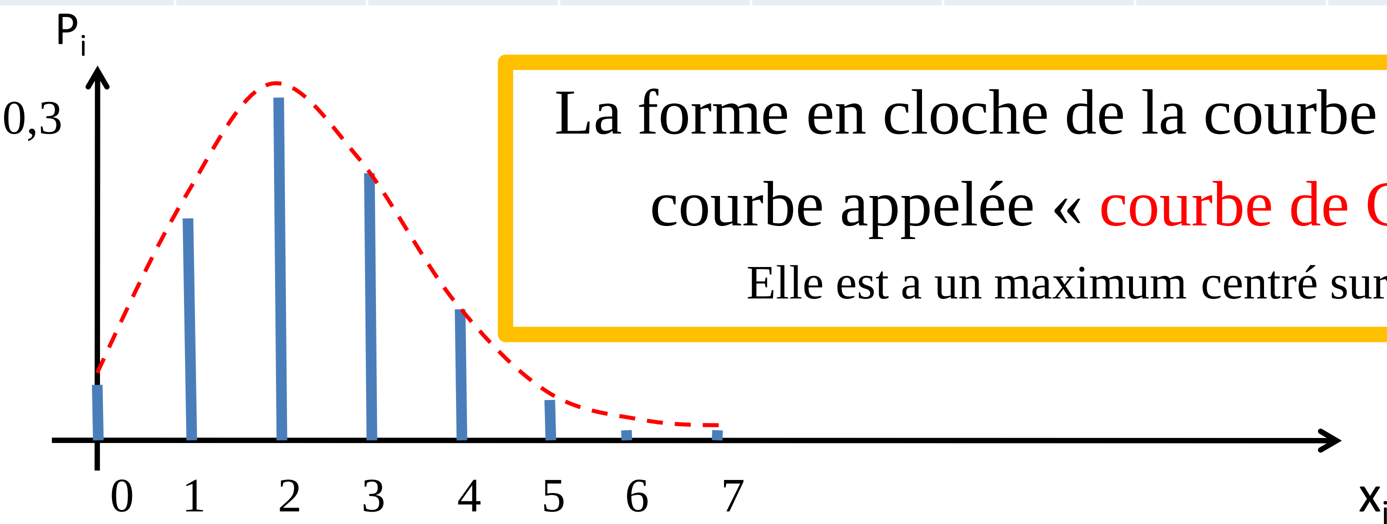
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\,\frac{2^7}{3^7}$	$7\,\frac{2^6}{3^7}$	$21\,\frac{2^5}{3^7}$	$35\,\frac{2^4}{3^7}$	$35\,\frac{2^3}{3^7}$	$21\,\frac{2^2}{3^7}$	$7\,\frac{2^1}{3^7}$	$1\,\frac{2^0}{3^7}$
≈	0,059	0,205	0,307	0,256	0,128	0,038	0,006	0,0005



La forme en cloche de la courbe est une courbe appelée « courbe de Gauss ».

4°) Mettez les valeurs de la variable aléatoire dans un graphe. Quelle est la forme de la courbe ?

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1\,\frac{2^7}{3^7}$	$7\,\frac{2^6}{3^7}$	$21\,\frac{2^5}{3^7}$	$35\,\frac{2^4}{3^7}$	$35\,\frac{2^3}{3^7}$	$21\,\frac{2^2}{3^7}$	$7\,\frac{2^1}{3^7}$	$1\,\frac{2^0}{3^7}$
≈	0,059	0,205	0,307	0,256	0,128	0,038	0,006	0,0005

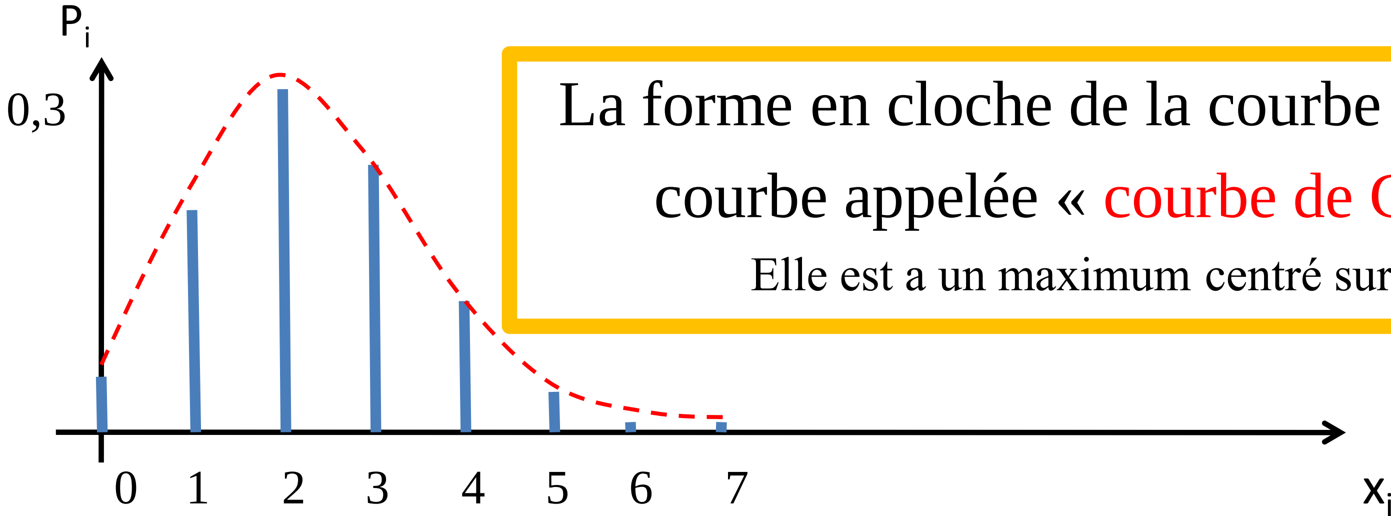


La forme en cloche de la courbe est une courbe appelée « courbe de Gauss ».

Elle est a un maximum centré sur …

4°) Mettez les valeurs de la variable aléatoire dans un graphe. Quelle est la forme de la courbe ?

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(X = x_i)$	$1 \dfrac{2^7}{3^7}$	$7 \dfrac{2^6}{3^7}$	$21 \dfrac{2^5}{3^7}$	$35 \dfrac{2^4}{3^7}$	$35 \dfrac{2^3}{3^7}$	$21 \dfrac{2^2}{3^7}$	$7 \dfrac{2^1}{3^7}$	$1 \dfrac{2^0}{3^7}$
≈	0,059	0,205	0,307	0,256	0,128	0,038	0,006	0,0005



La forme en cloche de la courbe est une courbe appelée « courbe de Gauss ».

Elle est a un maximum centré sur l'Espérance.