Exercice 21 : Une usine dégage 8453 kg de fumée le 01/01/2020. Chaque jour les rejets diminuent de 1,3%.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

u_n = masse de fumées rejetées le $n^{ème}$ jour de l'année.

1°) Démontrez que (u_n) est une suite géométrique.

2°) Déterminez la masse de fumées (arrondie à 0,1 kg près) rejetées le 28/02/2020 et le terme général.

3°) Déterminez la masse totale des rejets en 2020 et déduisez-en la moyenne journalière. Quel jour les rejets sont les plus proches de cette moyenne ?

4°) Quel est le % de gain annuel réalisé grâce à la chute journalière de 1,3% ?

1°) Démontrez que (u_n) est une suite géométrique.

… ?

1°) Démontrez que (u_n) est une suite géométrique.

$$u_{n+1} = u_n - 1{,}3\%\ u_n = (\ 1 - 1{,}3\%\ )\ u_n = 0{,}987\ u_n$$

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = C^{te} = 0{,}987}$$

(C^{te} signifie *constante*)

$\Leftrightarrow$ la suite est géométrique de raison 0,987

2°) Déterminez la masse de fumées le 28/02.

Le 28/02 est le 31 + 28 = 59$^{\text{ème}}$ jour

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m} \Rightarrow \frac{u_{59}}{u_1} = q^{59-1}$$

$$\Leftrightarrow u_{59} = u_1\, q^{58} = 8453\,(\,0{,}987^{58}\,)$$

$$\approx 3957{,}36 \text{ } kg$$

2°) Déterminez l'expression de u_n.

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m} \Rightarrow \frac{u_n}{u_1} = q^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 8453 \times 0{,}987^{n-1}$$

3°) Déterminez la masse totale des rejets en 2020

Soit la suite (u_n) définie par u_n= la masse dégagée le $n^{ième}$ jour. $u_1 = 8453$

$u_{n+1} = 0{,}987\, u_n$ ⇨ la suite est géométrique.

Masse totale dégagée en 1 an : $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{365}$

La suite est géométrique

$$\Rightarrow S = 1^{er}\text{ terme}\ \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

3°) Déterminez la masse totale des rejets en 2020

Soit la suite (u_n) définie par u_n= la masse dégagée le $n^{\text{ième}}$ jour. $u_1 = 8453$

$u_{n+1} = 0{,}987\ u_n$ ⇒ la suite est géométrique.

Masse totale dégagée en 1 an : $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{365}$

La suite est géométrique

$$\Rightarrow S = 1^{er}\ \text{terme}\ \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q} = 8453\ \frac{1 - 0{,}987^{365}}{1 - 0{,}987} \approx 644750\ \mathit{kg}$$

3°) Déterminez la masse totale des rejets en 2020 et déduisez-en la moyenne journalière.

Soit la suite (u_n) définie par u_n= la masse dégagée le $n^{\text{ième}}$ jour. $u_1 = 8453$

$u_{n+1} = 0{,}987\, u_n$ ⇒ la suite est géométrique.

Masse totale dégagée en 1 an : $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{365}$

La suite est géométrique

$$\Rightarrow S = 1^{\text{er}}\text{ terme}\ \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q} = 8453\ \frac{1 - 0{,}987^{365}}{1 - 0{,}987} \approx 644750\ kg$$

$$\textbf{moyenne} = \frac{\text{production totale}}{\text{n}^{\text{b}}\text{ de jours}} \approx \frac{644750}{365} \approx \mathbf{1766}\ kg/jour$$

3°) Quel jour les rejets sont les plus proches de cette moyenne ?

La suite est géométrique,

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m} \quad \text{donc} \quad u_n = u_1\, q^{n-1}$$

On veut $u_n \approx 1766$ donc $1766 \approx 8453 \times 0{,}987^{n-1}$

3°) Quel jour les rejets sont les plus proches de cette moyenne ?

La suite est géométrique,

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m} \quad \text{donc} \quad u_n = u_1 \, q^{n-1}$$

On veut $u_n \approx 1766$ donc $1766 \approx 8453 \times 0{,}987^{n-1}$

On ne saura résoudre ce type d'équation (où l'inconnue est dans l'exposant) que plus tard dans l'année, donc seule la calculatrice peut nous aider. Comme la suite est monotone (car décroissante lorsque $0 < q < 1$), les termes les plus proches de 1766 donneront n en valeur exacte :

3°) Quel jour les rejets sont les plus proches de cette moyenne ?

La suite est géométrique,

$$\frac{u_n}{u_m} = q^{n-m} \quad \text{donc} \quad u_n = u_1\, q^{n-1}$$

On veut $u_n \approx 1766$ donc $1766 \approx 8453 \times 0{,}987^{n-1}$

On ne saura résoudre ce type d'équation (où l'inconnue est dans l'exposant) que plus tard dans l'année, donc seule la calculatrice peut nous aider. Comme la suite est monotone (car décroissante lorsque $0 < q < 1$), les termes les plus proches de 1766 donneront n en valeur exacte :

$8453 \times 0{,}987^{120-1} \approx 1781$ (écart de 15) $8453 \times 0{,}987^{121-1} \approx 1758$ (écart de 8)

Réponse : le 121ème jour de l'année (le *1er mai*).

Une usine dégage 1200 kg de fumées le 01/01/1987.

Chaque jour, les dégagements chutent de 1,3%.

4°) Quel est le % de gain annuel réalisé grâce à la chute journalière de 1,3% ?

Sans les chutes de 1,3% :

dégagements $D_0 = 365 \times 8453 = 3085345$ kg

Avec les chutes de 1,3% :

dégagements $D_1 = 644750$ kg *(voir question 3°)*

Une usine dégage 1200 kg de fumées le 01/01/1987.

Chaque jour, les dégagements chutent de 1,3%.

4°) Quel est le % de gain annuel réalisé grâce à la chute journalière de 1,3% ?

Sans les chutes de 1,3% :

dégagements $D_0 = 365 \times 8453 = 3085345$ kg

Avec les chutes de 1,3% :

dégagements $D_1 = 644750$ kg *(voir question 3°)*

$$\frac{\text{gain}}{\text{référence}} = \frac{3085345 - 644750}{3085345} \approx 0{,}791 = 79{,}1\ \%$$