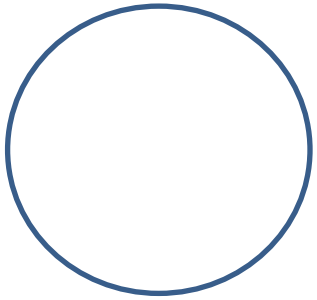
III Application des intégrales : Exercice 9 :

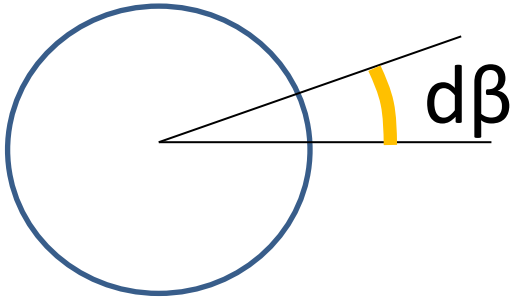
Déterminez les formules en utilisant les intégrales.

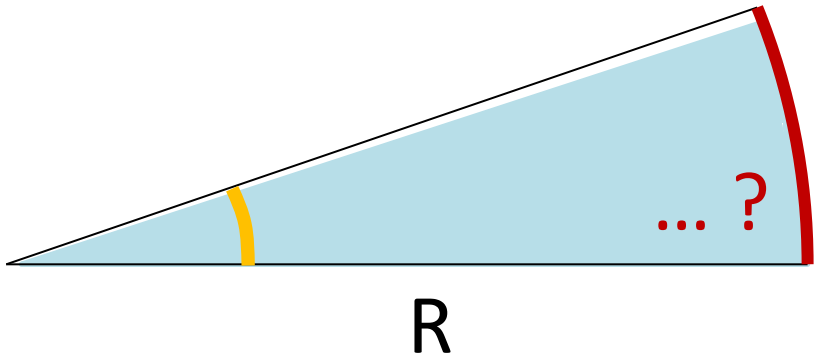
1°) Aire d'un disque.



III Application des intégrales : Exercice 9

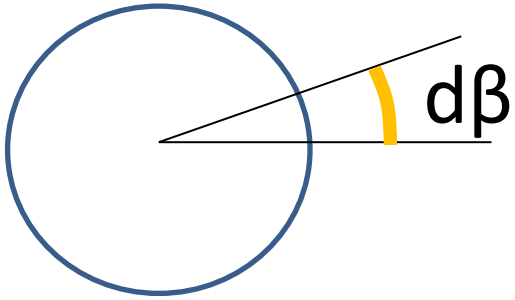
Déterminez l'aire d'un **disque**.

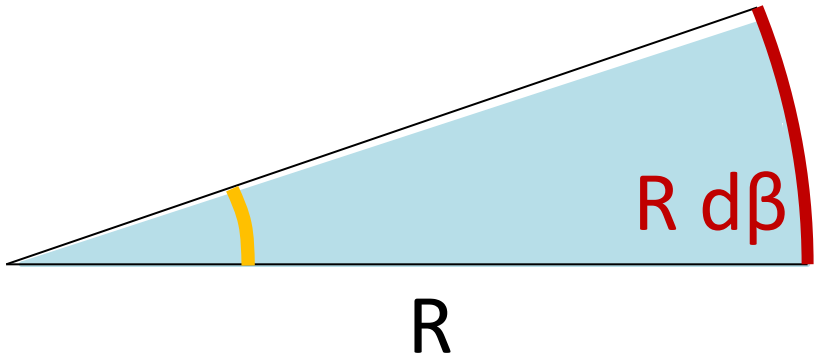




III Application des intégrales : Exercice 9

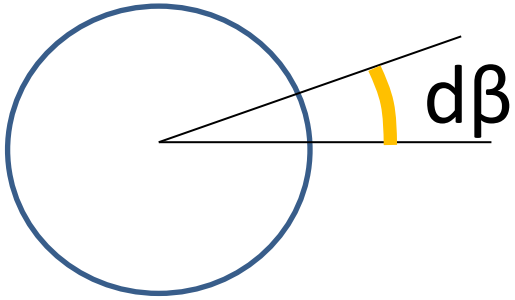
Déterminez l'aire d'un **disque**.

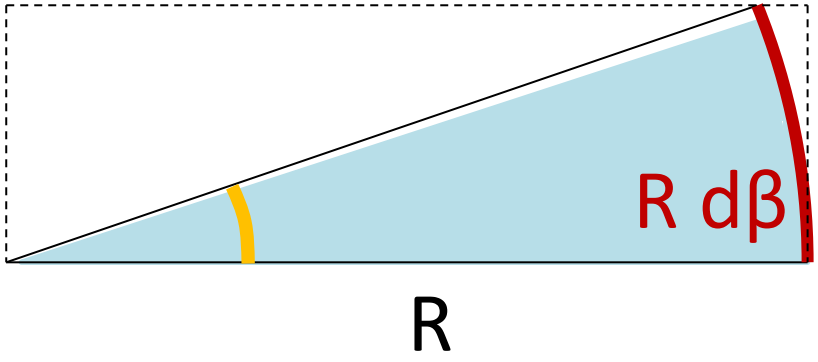




III Application des intégrales : Exercice 9

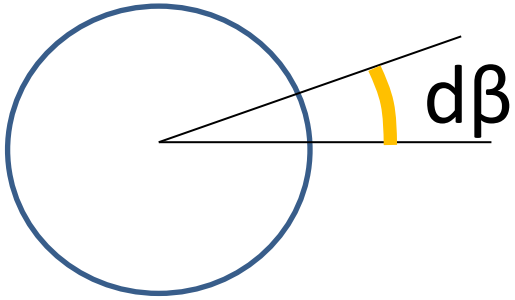
Déterminez l'aire d'un **disque**.

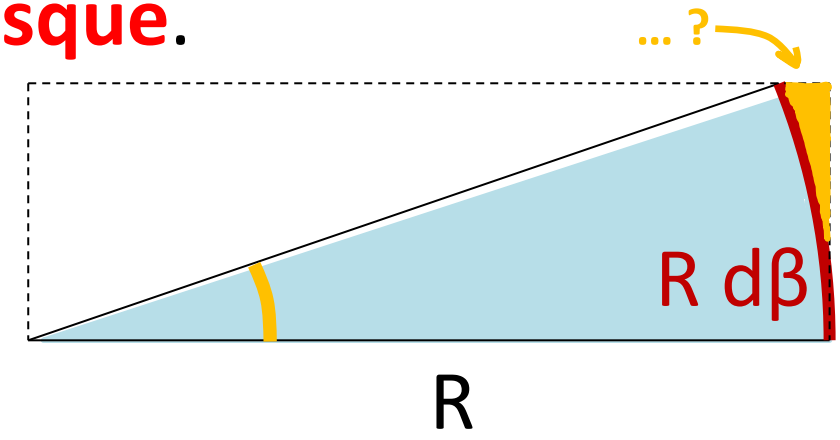




III Application des intégrales : Exercice 9

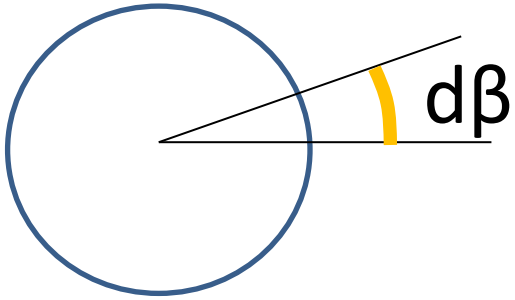
Déterminez l'aire d'un **disque**.

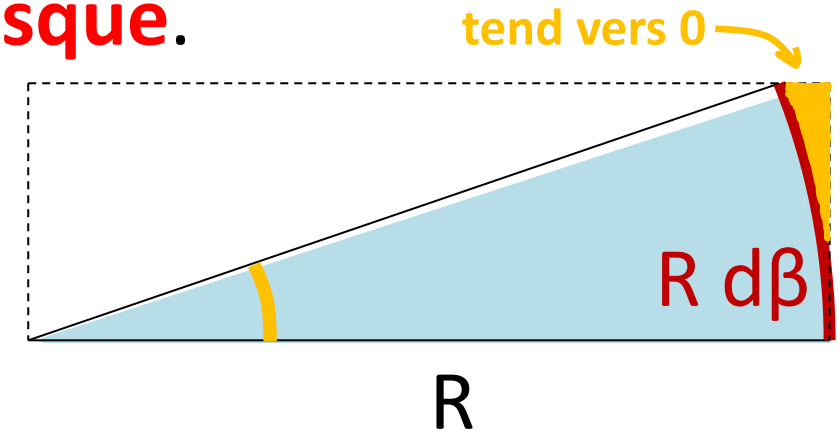




III Application des intégrales : Exercice 9

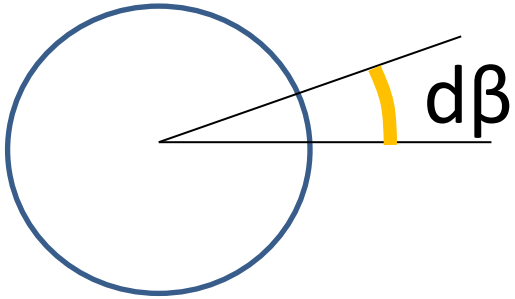
Déterminez l'aire d'un **disque**.

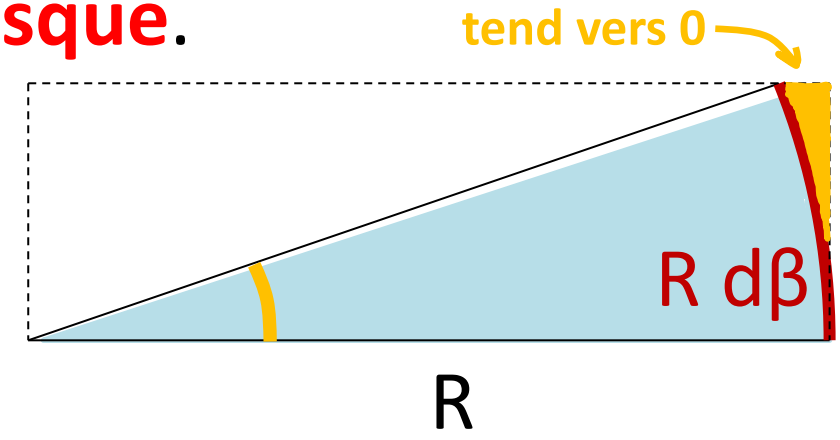




III Application des intégrales : Exercice 9

Déterminez l'aire d'un **disque**.

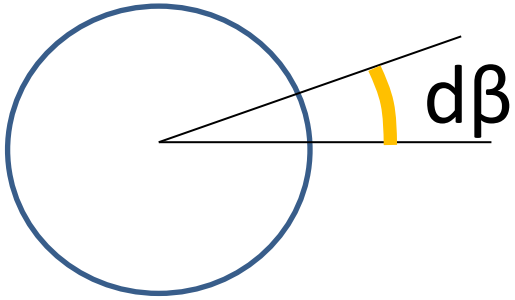


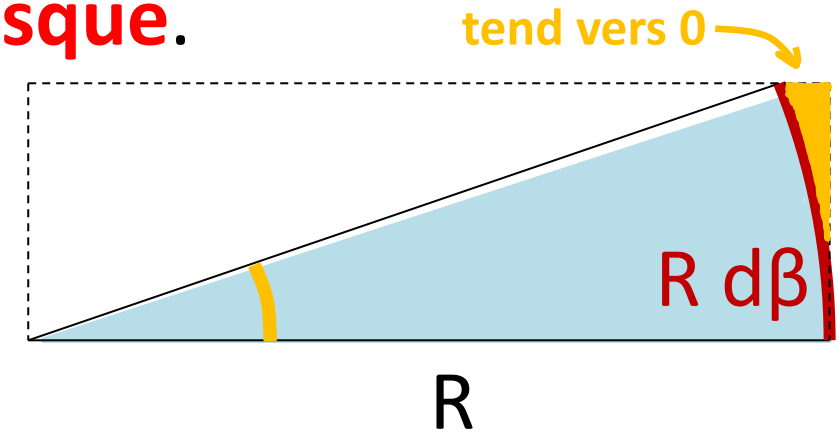


ds ≈ …

III Application des intégrales : Exercice 9

Déterminez l'aire d'un **disque**.

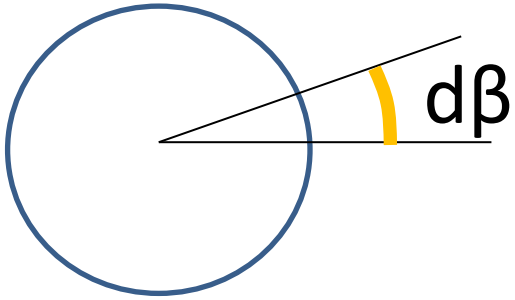


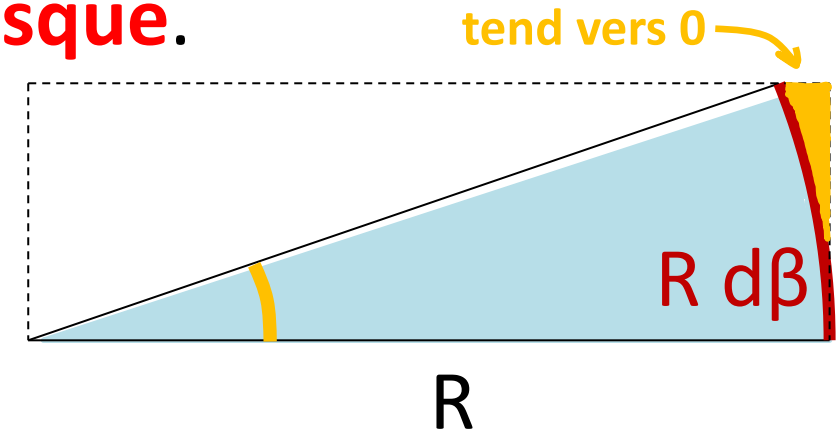


ds ≈ 0,5 × aire du rectangle = ...

III Application des intégrales : Exercice 9

Déterminez l'aire d'un **disque**.

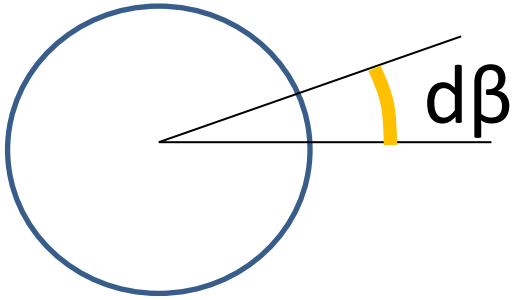


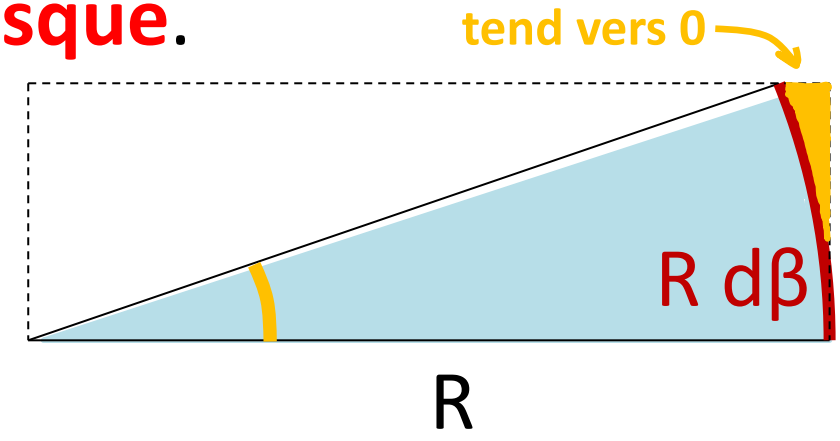


ds ≈ 0,5 × aire du rectangle = 0,5 (R × R dβ) = …

III Application des intégrales : Exercice 9

Déterminez l'aire d'un **disque**.

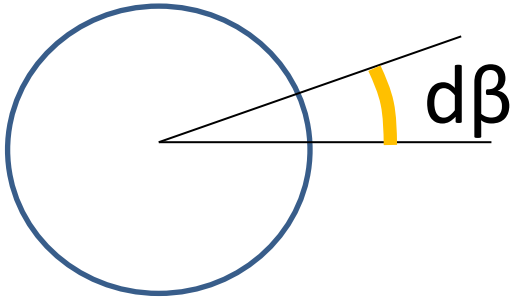


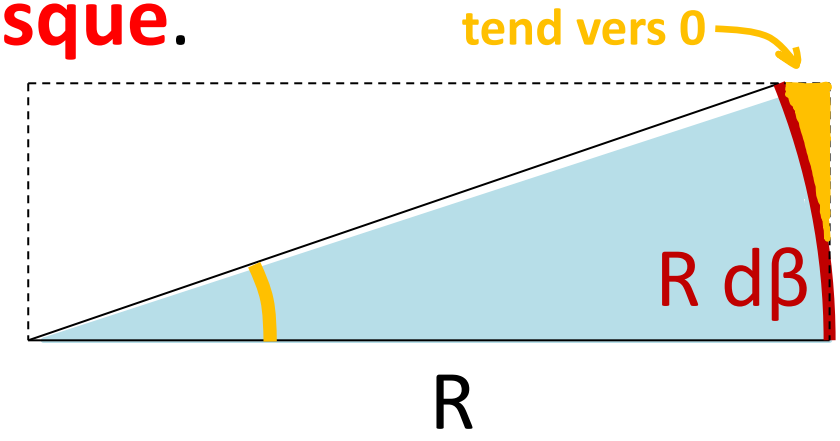


$ds \approx 0{,}5 \times$ aire du rectangle $= 0{,}5 \left(R \times R\, d\beta \right) = 0{,}5\, R^2\, d\beta$

III Application des intégrales : Exercice 9

Déterminez l'aire d'un **disque**.



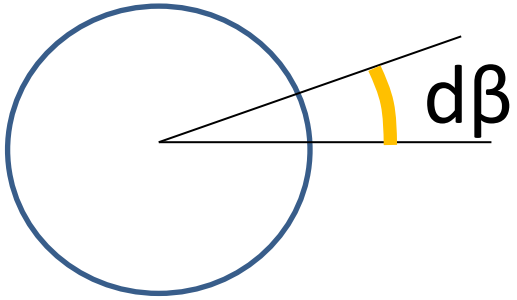


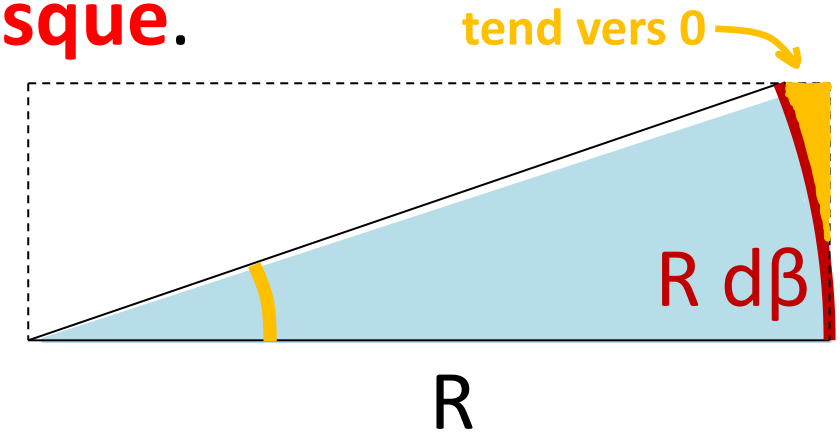
$ds \approx 0{,}5 \times$ aire du rectangle $= 0{,}5\,(\,R \times R\,d\beta\,) = 0{,}5\,R^2\,d\beta$

$$S = \int ds = \int \ldots$$

III Application des intégrales : Exercice 9

Déterminez l'aire d'un **disque**.



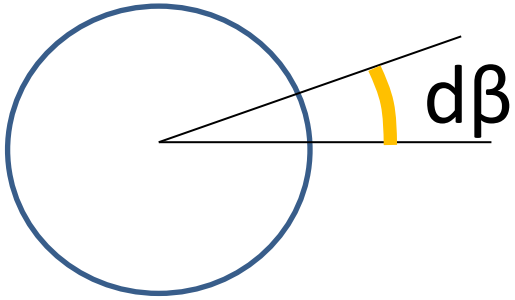


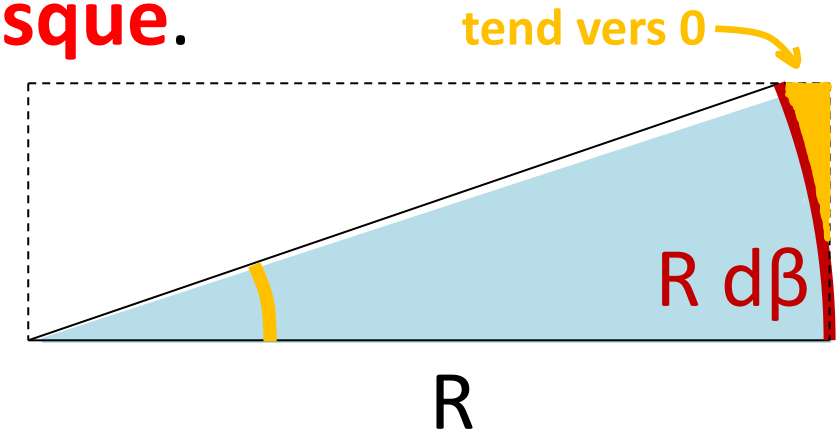
$ds \approx 0{,}5 \times$ aire du rectangle $= 0{,}5\,(\,R \times R\,d\beta\,) = 0{,}5\,R^2\,d\beta$

$$\mathbf{S} = \int ds = \int_0^{2\pi} 0{,}5\,R^2\,d\beta = \Big[\ \dots\ \Big]_0^{2\pi}$$

III Application des intégrales : Exercice 9

Déterminez l'aire d'un **disque**.





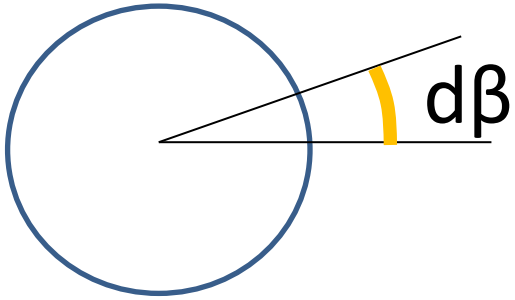
$ds \approx 0{,}5 \times$ aire du rectangle $= 0{,}5\,(\,R \times R\,d\beta\,) = 0{,}5\,R^2\,d\beta$

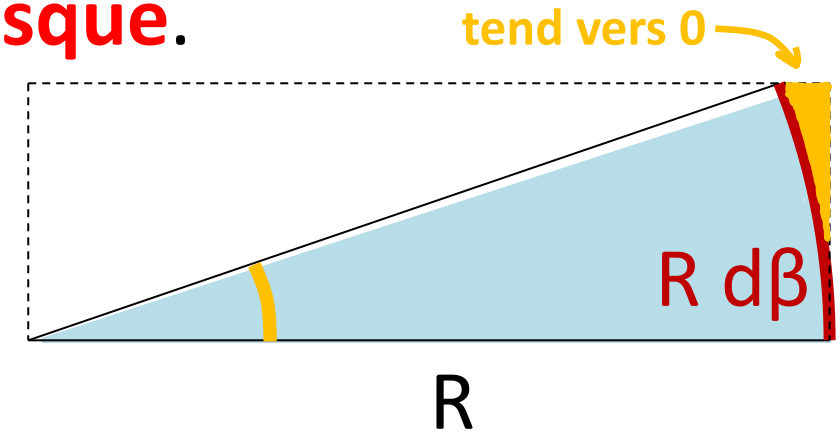
$$\mathbf{S} = \int ds = \int_0^{2\pi} 0{,}5\,R^2\,d\beta = \Big[\,0{,}5\,R^2\,\beta\,\Big]_0^{2\pi}$$

$= \ldots$

III Application des intégrales : Exercice 9

Déterminez l'aire d'un **disque**.





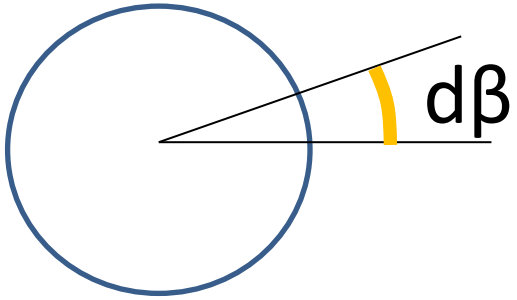
$ds \approx 0{,}5 \times$ aire du rectangle $= 0{,}5\,(\,R \times R\,d\beta\,) = 0{,}5\,R^2\,d\beta$

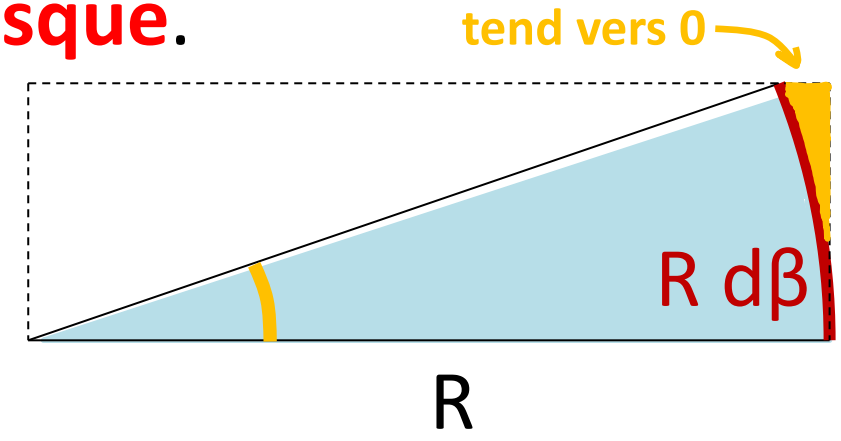
$$S = \int ds = \int_0^{2\pi} 0{,}5\,R^2\,d\beta = \Big[\,0{,}5\,R^2\,\beta\,\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 0{,}5\,R^2\,2\pi - 0{,}5\,R^2\,0 = \ldots$$

III Application des intégrales : Exercice 9

Déterminez l'aire d'un **disque**.



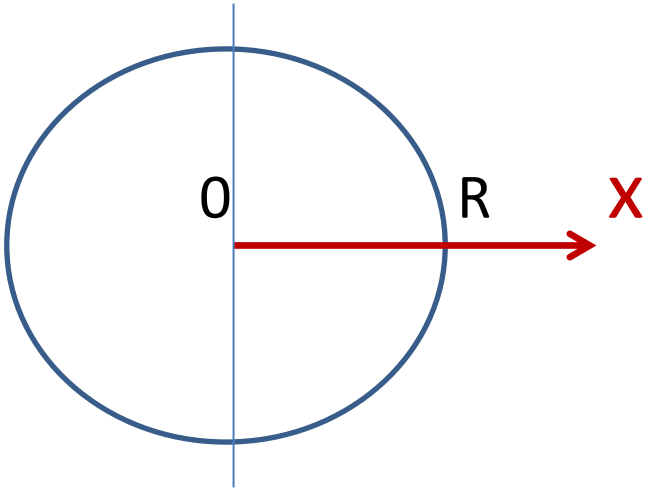


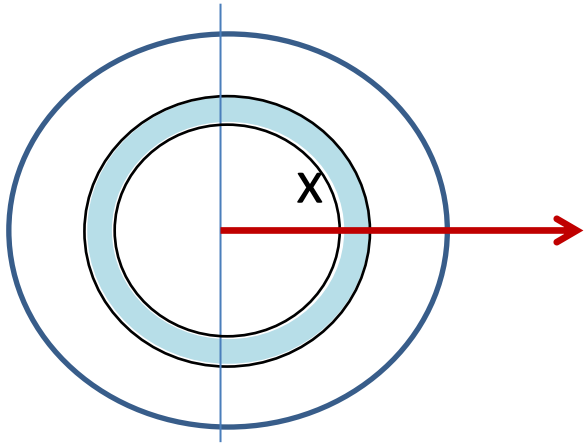
$ds \approx 0{,}5 \times$ aire du rectangle $= 0{,}5\,(R \times R\,d\beta) = 0{,}5\,R^2\,d\beta$

$$\mathbf{S} = \int ds = \int_0^{2\pi} 0{,}5\,R^2\,d\beta = \Big[0{,}5\,R^2\,\beta\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 0{,}5\,R^2\,2\pi - 0{,}5\,R^2\,0 = \mathbf{\pi R^2}$$

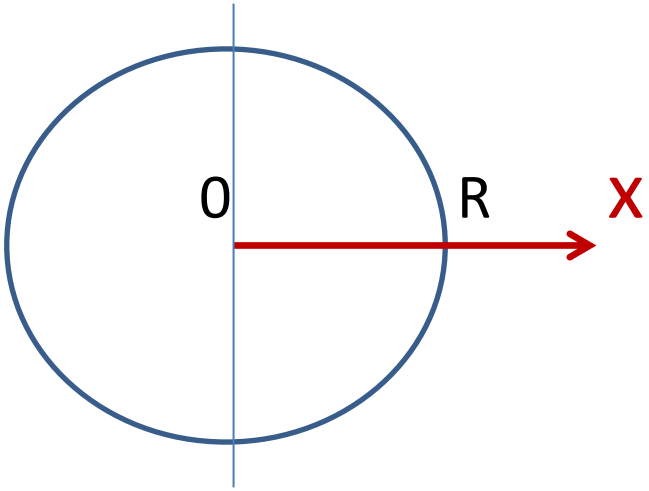
Autre méthode :

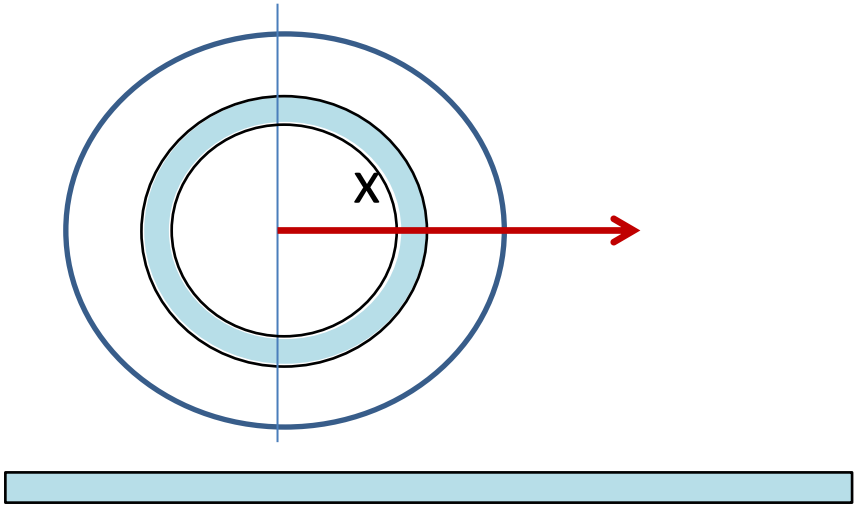




ds ≈ aire du …

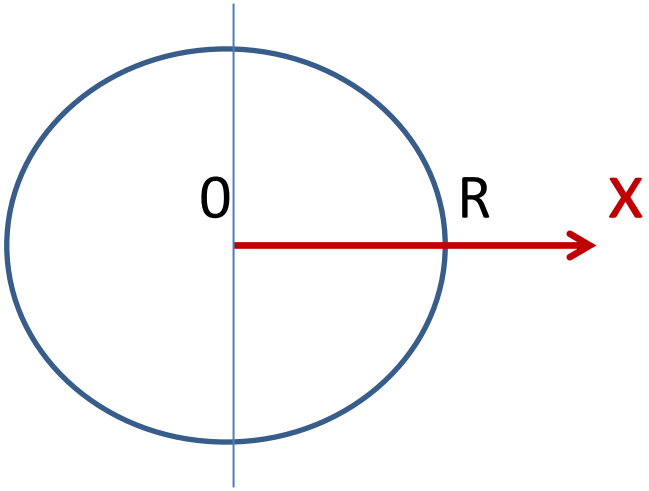
Autre méthode :

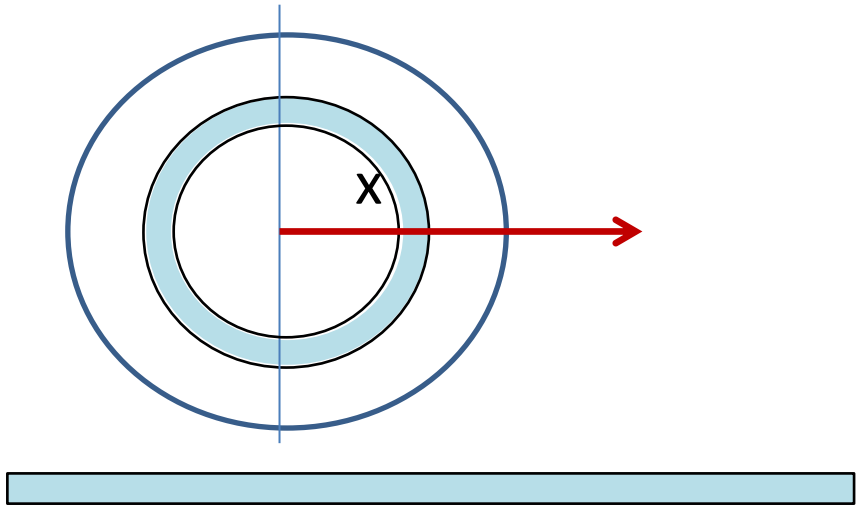




ds ≈ aire du …

Autre méthode :

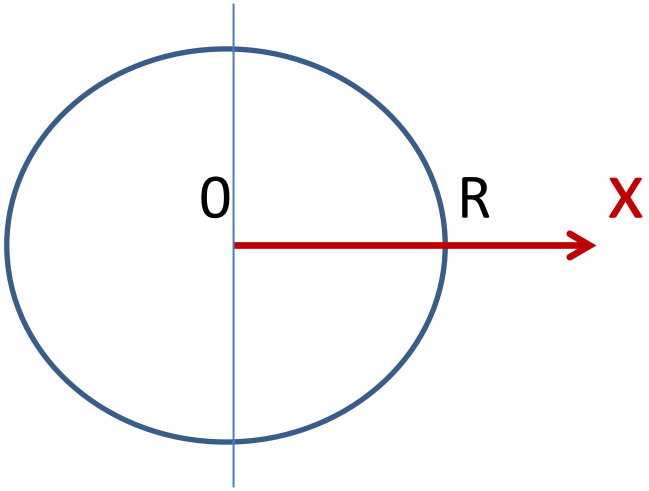


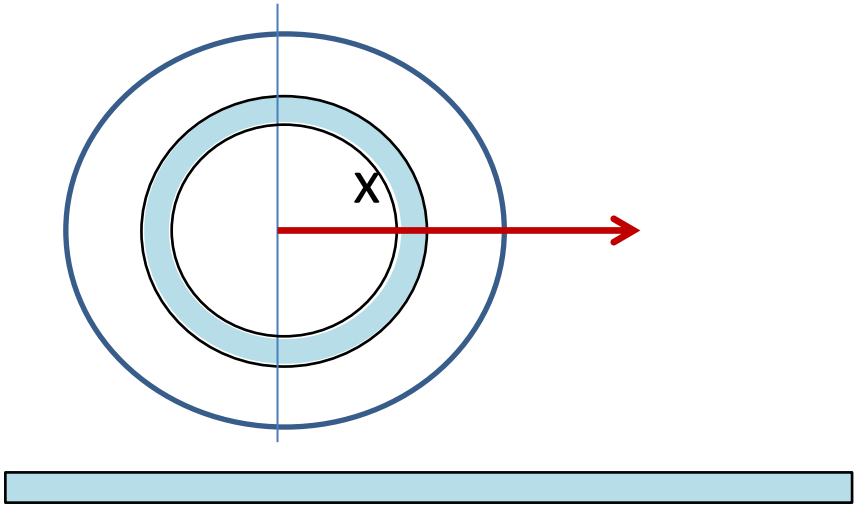


ds ≈ aire du rectangle = …

$$\mathbf{S} = \int ds = \int_0^R 2\pi x \, dx = \left[\pi x^2 \right]_0^R = \pi R^2 - 0 = \mathbf{\pi R^2}$$

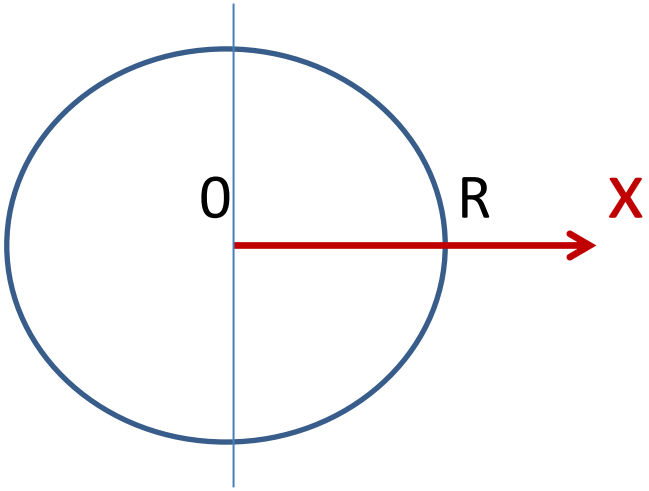
Autre méthode :

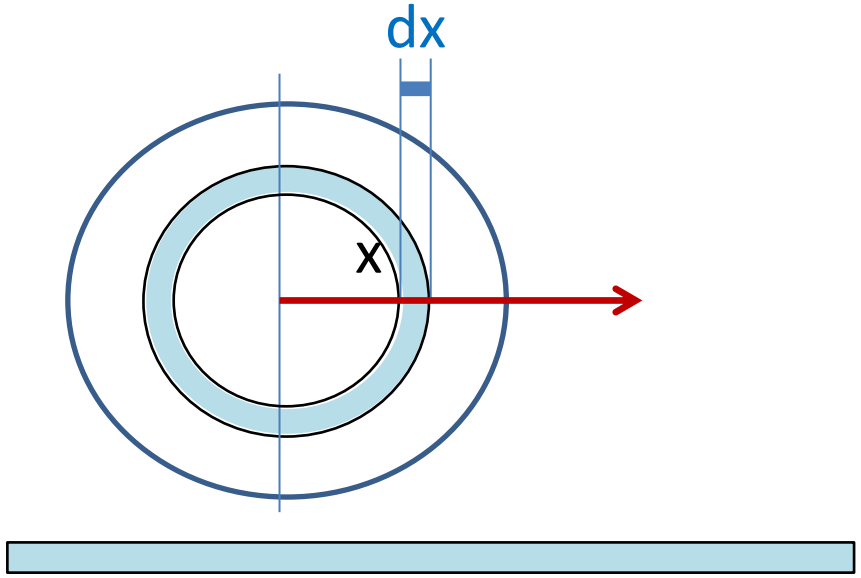




ds ≈ aire du rectangle = longueur × hauteur = ...

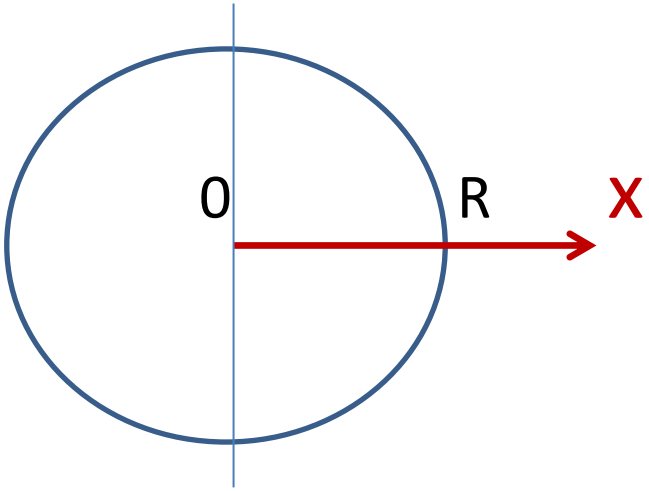
Autre méthode :

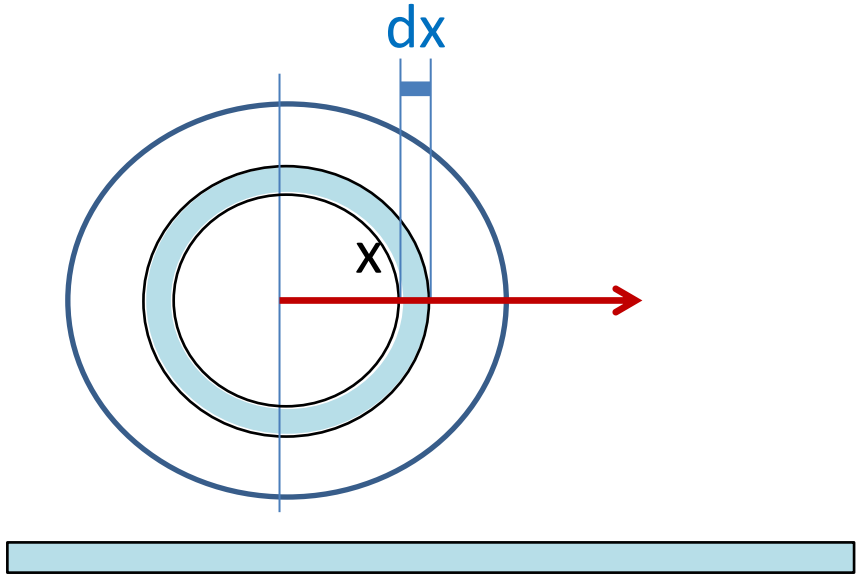




ds ≈ aire du rectangle = longueur × hauteur = ...

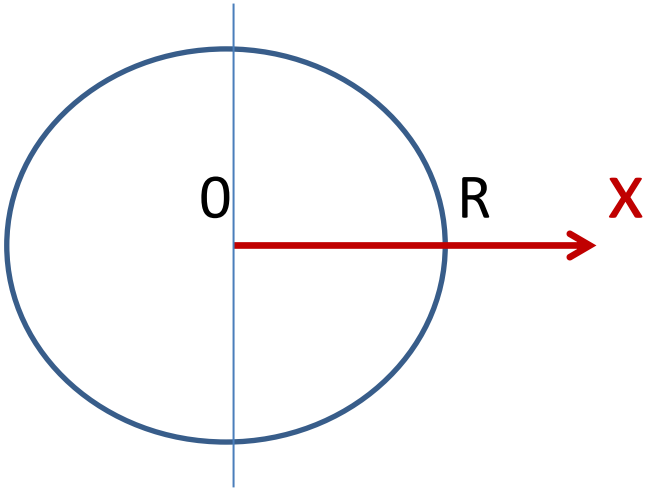
Autre méthode :

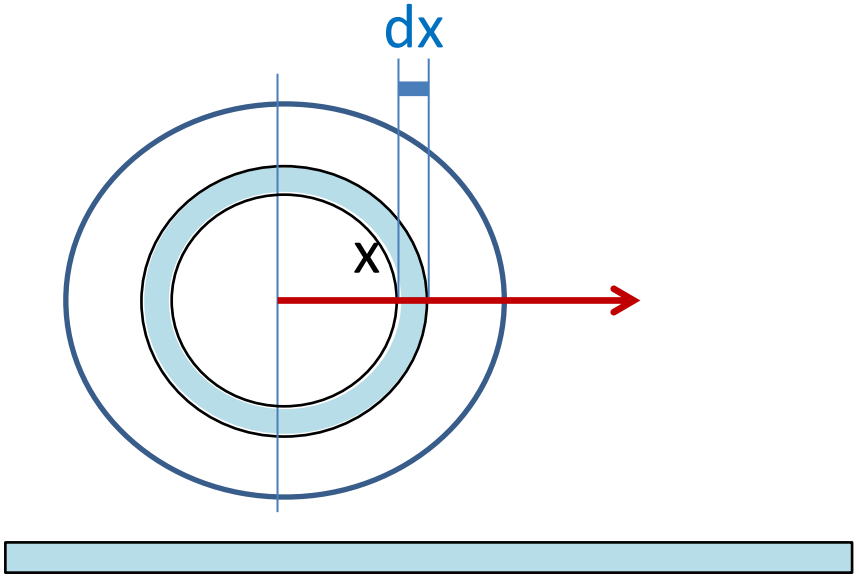




ds ≈ aire du rectangle = longueur × hauteur = $2\pi x \times dx$

Autre méthode :

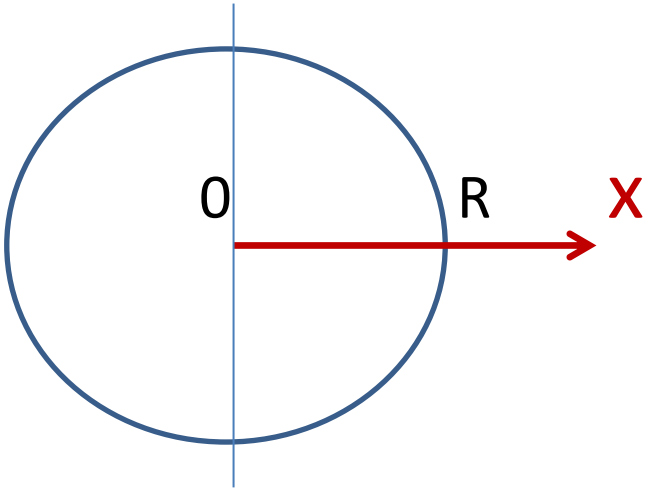


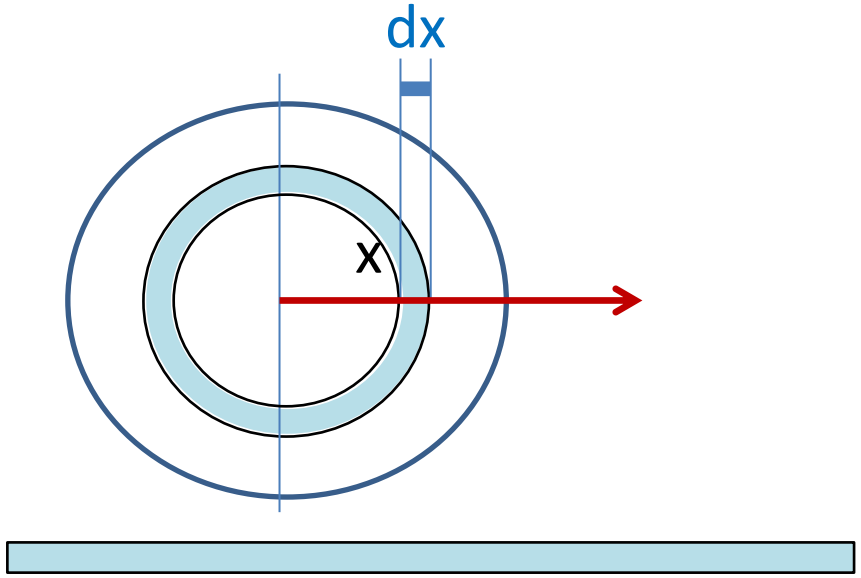


ds ≈ aire du rectangle = longueur × hauteur = $2\pi x \times dx$

$$S = \int ds = \ldots$$

Autre méthode :

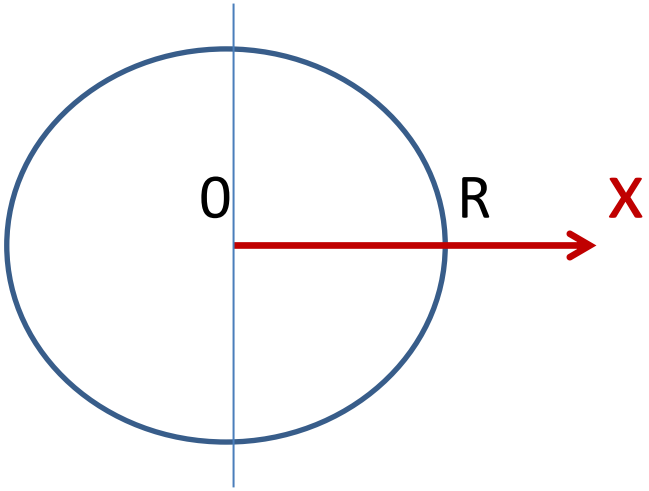


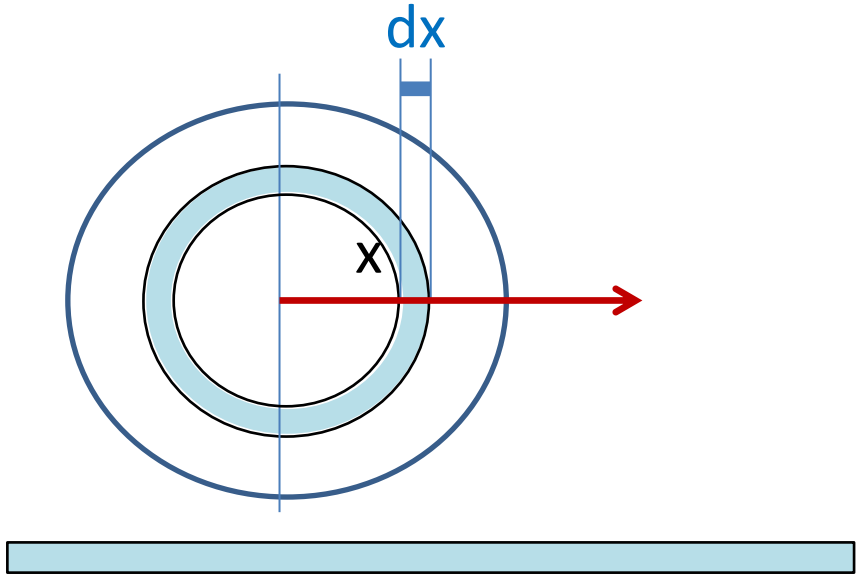


$ds \approx$ aire du rectangle = longueur × hauteur = $2\pi x \times dx$

$$S = \int ds = \int_0^R 2\pi x \, dx = \Big[\ldots \Big]_0^R$$

Autre méthode :

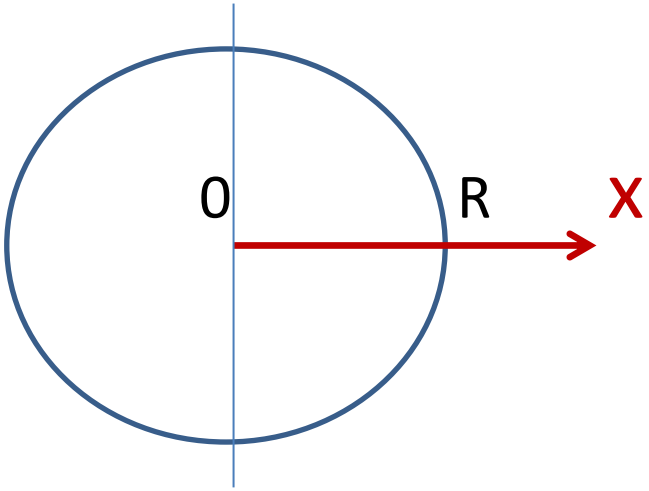


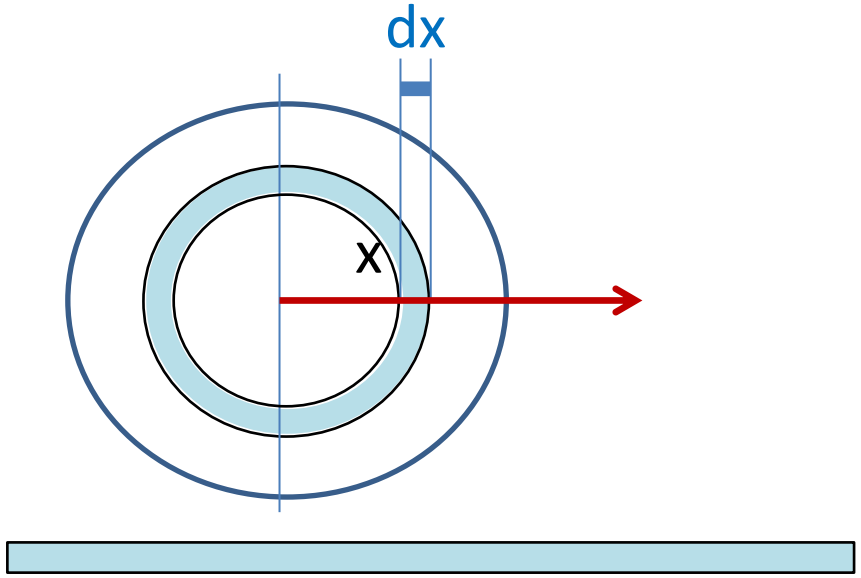


$ds \approx$ aire du rectangle = longueur × hauteur = $2\pi x \times dx$

$$S = \int ds = \int_0^R 2\pi x \, dx = \left[\pi x^2 \right]_0^R = \ldots$$

Autre méthode :

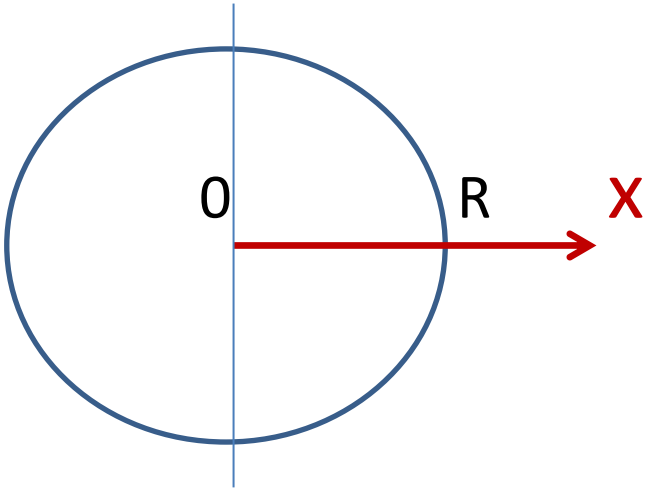


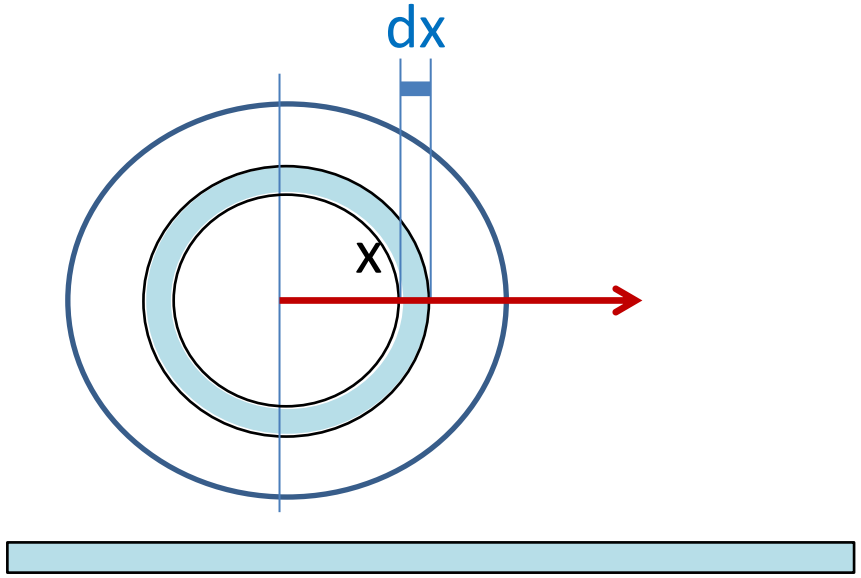


$ds \approx$ aire du rectangle = longueur × hauteur = $2\pi x \times dx$

$$\mathbf{S} = \int ds = \int_0^R 2\pi x \, dx = \Big[\pi x^2 \Big]_0^R = \pi R^2 - 0 = \mathbf{\ldots}$$

Autre méthode :

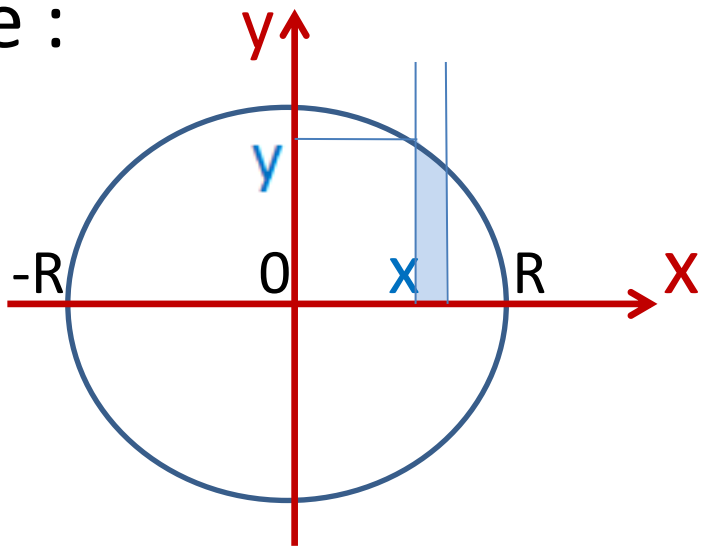


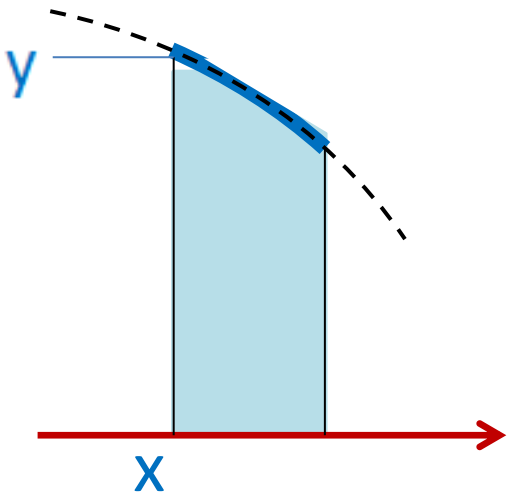


$ds \approx$ aire du rectangle = longueur × hauteur = $2\pi x \times dx$

$$\mathbf{S} = \int ds = \int_0^R 2\pi x \, dx = \left[\pi x^2 \right]_0^R = \pi R^2 - 0 = \mathbf{\pi R^2}$$

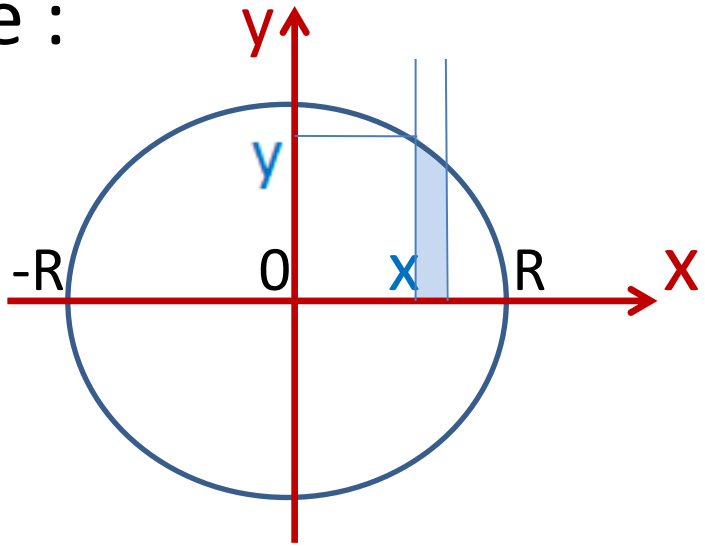
Autre méthode :

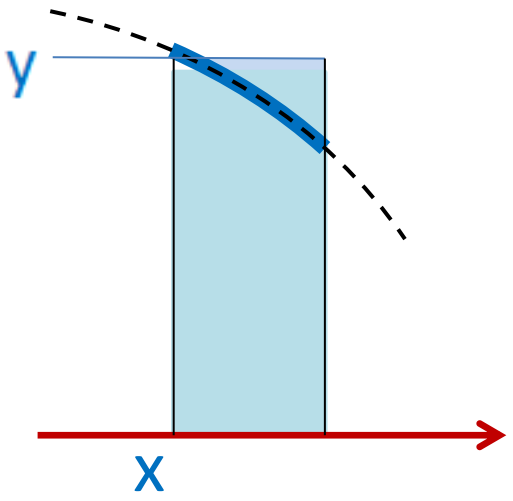




ds ≈ …

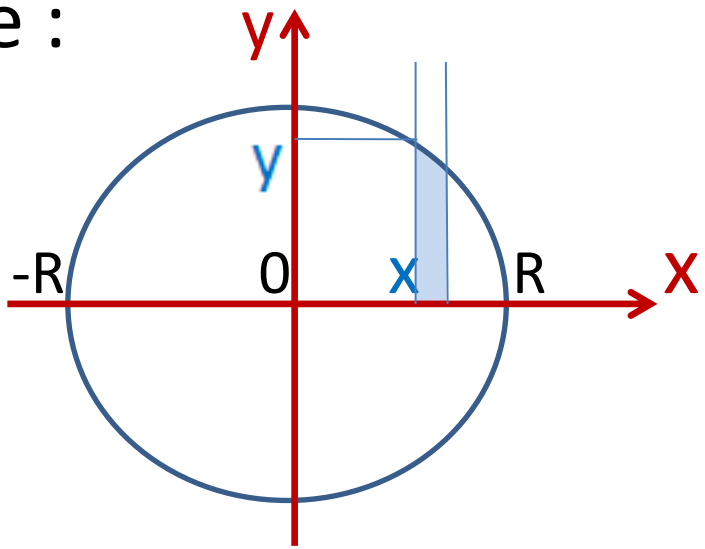
Autre méthode :

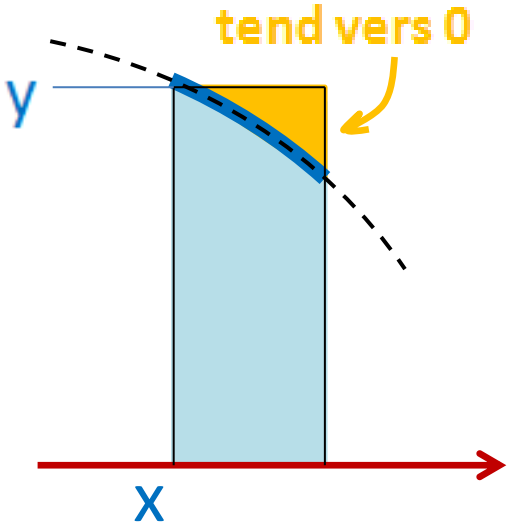




ds ≈ aire du rectangle = …

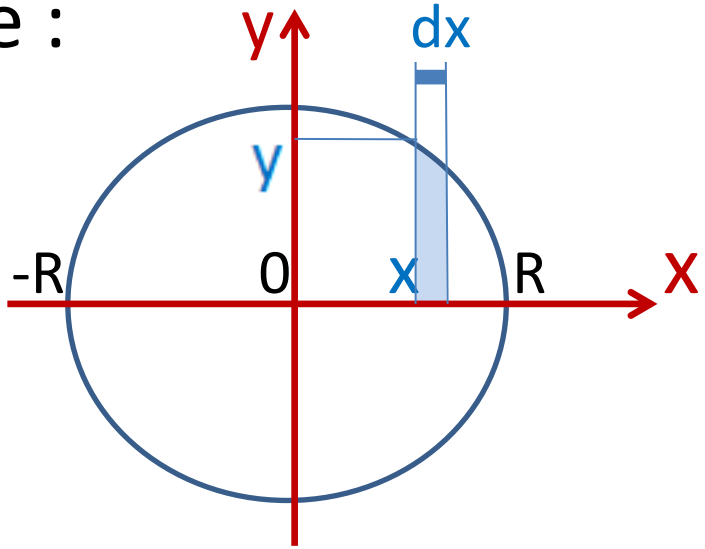
Autre méthode :

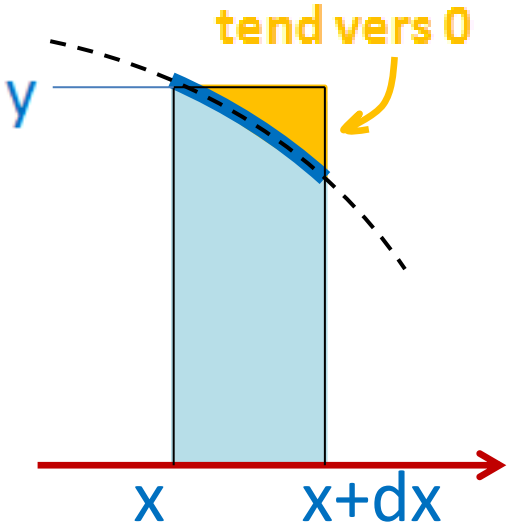




ds ≈ aire du rectangle = longueur × hauteur = ...

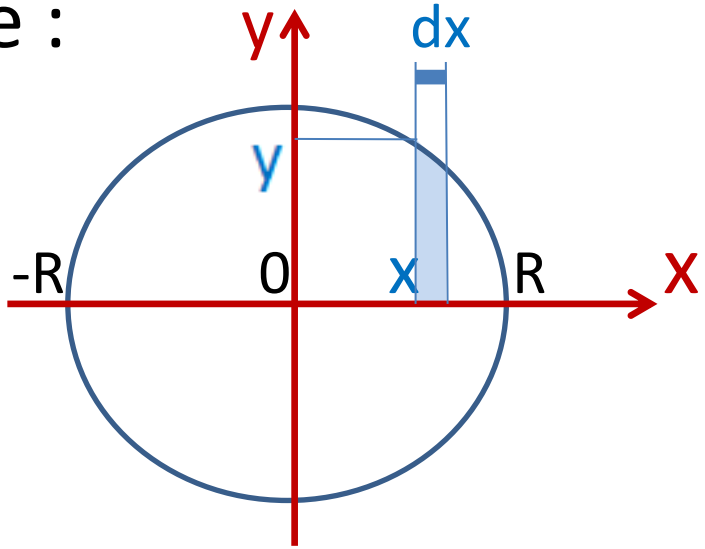
Autre méthode :

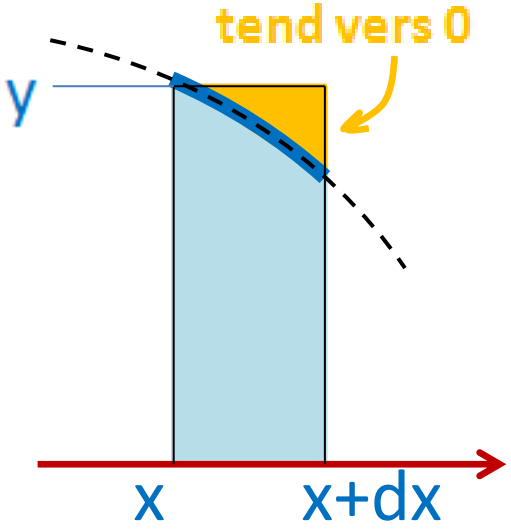




ds ≈ aire du rectangle = longueur × hauteur = $y \times dx$

Autre méthode :

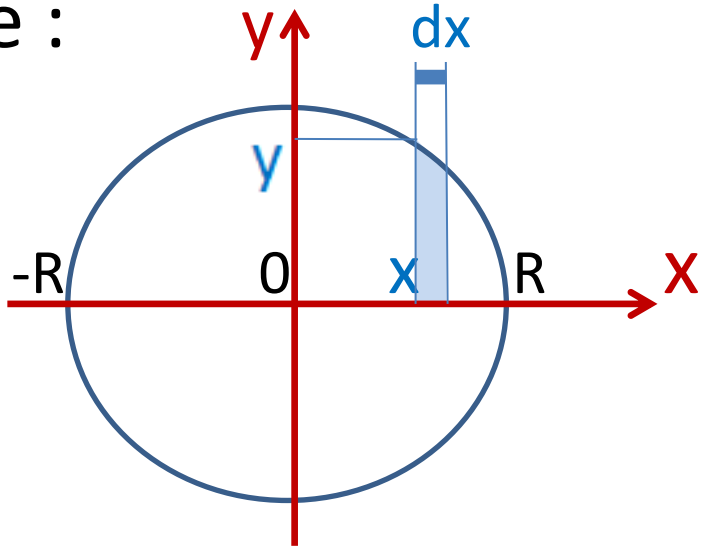


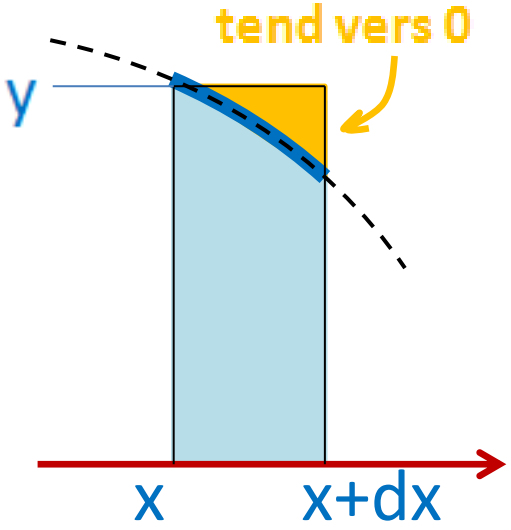


ds ≈ aire du rectangle = longueur × hauteur = $y \times dx$

$S = \ldots \int$

Autre méthode :

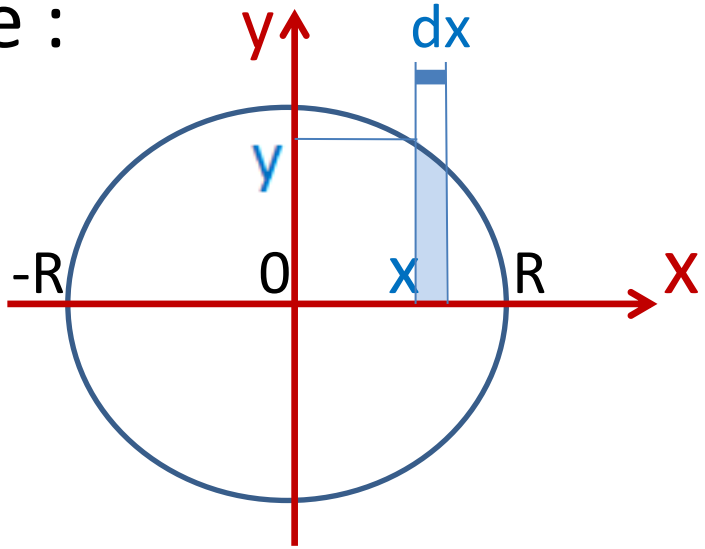


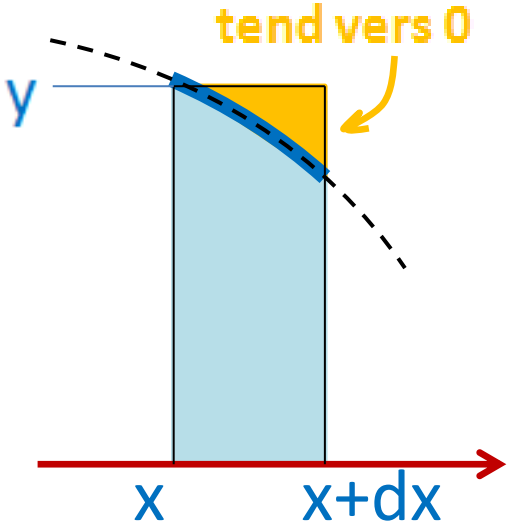


ds ≈ aire du rectangle = longueur × hauteur = $y \times dx$

$$S = 2\int ds = 2\int_{\dots}^{\dots} \dots$$

Autre méthode :

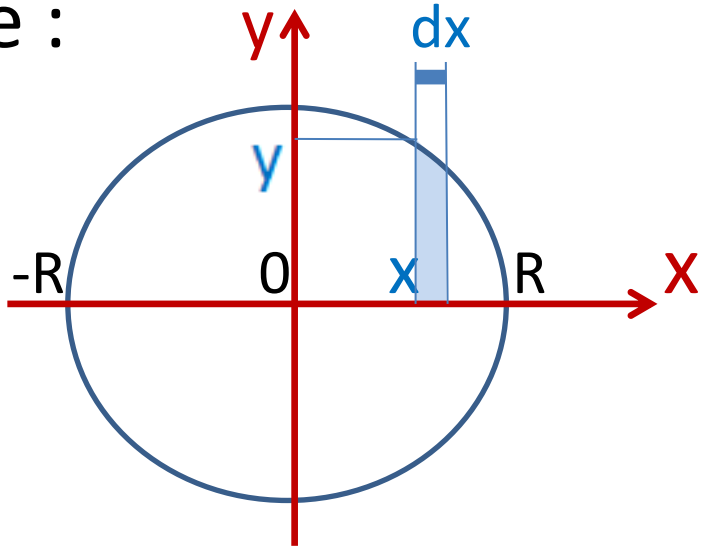


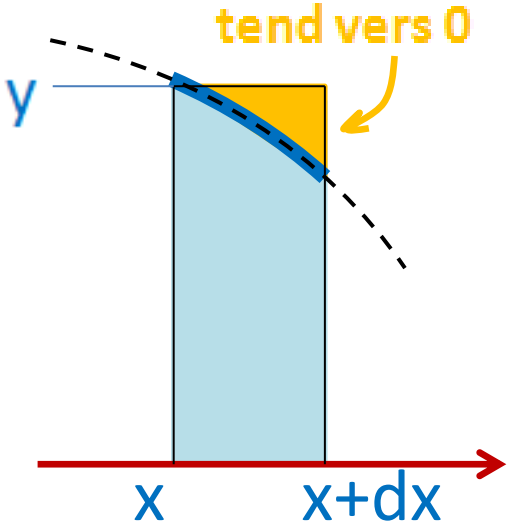


$ds \approx$ aire du rectangle = longueur × hauteur = $y \times dx$

$$S = 2\int ds = 2\int_{-R}^{R} y\,dx$$

Autre méthode :





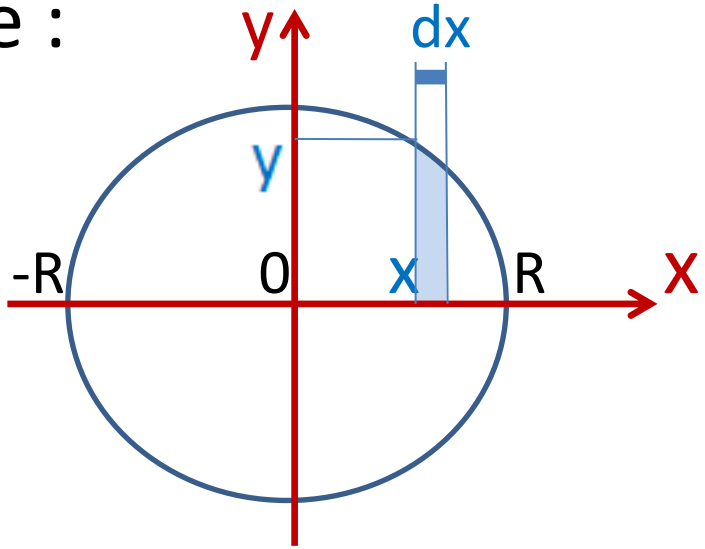
ds ≈ aire du rectangle = longueur × hauteur = $y \times dx$

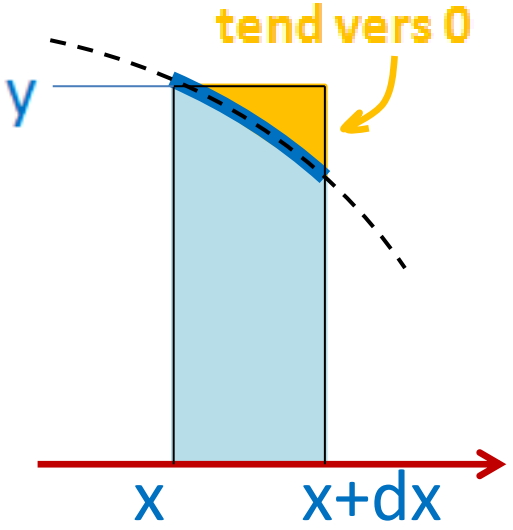
$$S = 2\int ds = 2\int_{-R}^{R} y\,dx$$

mais y dépend de x donc

il faut …

Autre méthode :





ds ≈ aire du rectangle = longueur × hauteur = $y \times dx$

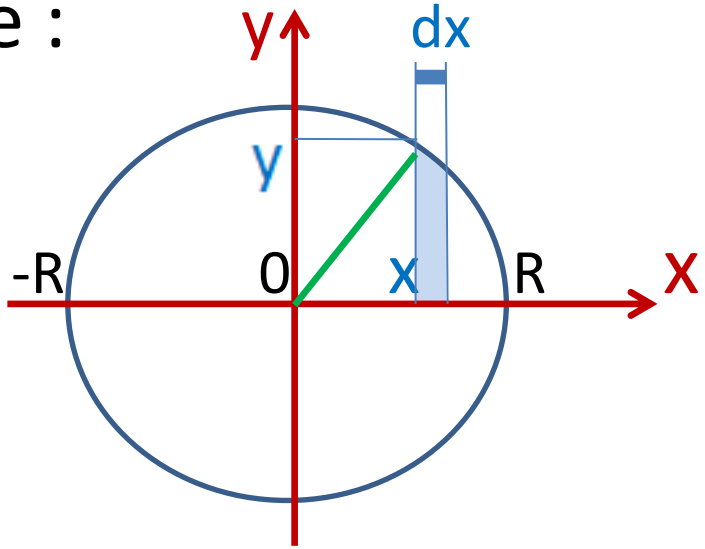
$$S = 2\int ds = 2\int_{-R}^{R} y\,dx$$

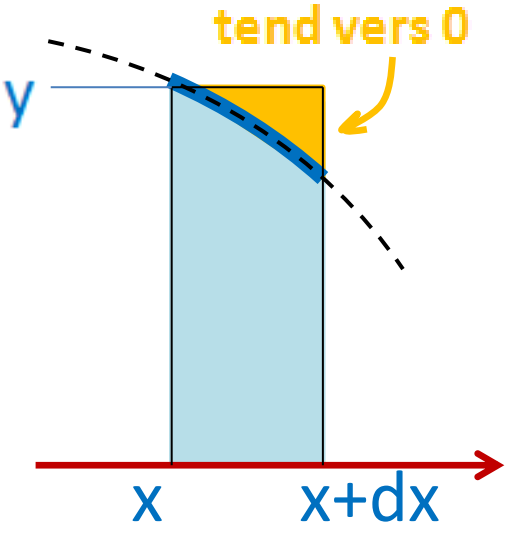
mais y dépend de x donc

il faut trouver l'expression $y = f(x)$

…

Autre méthode :





ds ≈ aire du rectangle = longueur × hauteur = $y \times dx$

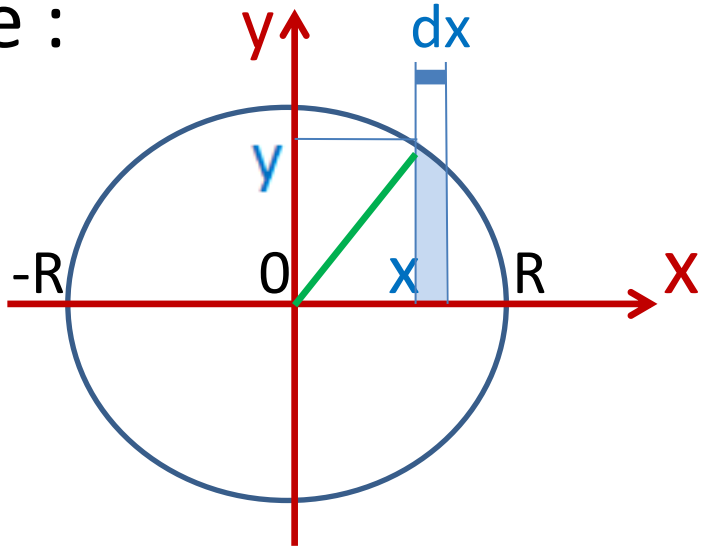
$$S = 2\int ds = 2\int_{-R}^{R} y\,dx$$

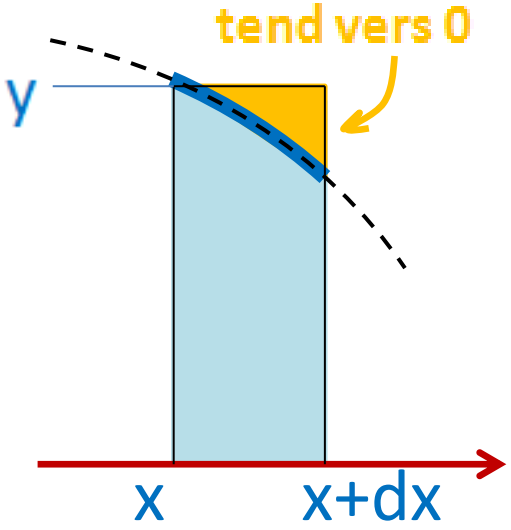
mais y dépend de x donc

il faut trouver l'expression $y = f(x)$

Pythagore : $x^2 + y^2 = R^2$ ⇒ $y =$ …

Autre méthode :





ds ≈ aire du rectangle = longueur × hauteur = $y \times dx$

$$S = 2\int ds = 2\int_{-R}^{R} y\,dx$$

mais y dépend de x donc

il faut trouver l'expression $y = f(x)$

Pythagore : $x^2 + y^2 = R^2$ ⟹ $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais …

$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : ... = x/R

$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

$\Rightarrow$ $x = R \cos w$ $\Rightarrow$ $x' = dx/dw = \ldots$

$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = \ldots$

$$S = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$\sqrt{R^2 - x^2} = \ldots$

$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \ldots}$$

$$S = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\ldots}$$

$$S = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\sin^2 w} = \ldots$$

$$S = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\sin^2 w} = R \sin w \quad \text{si} \quad \ldots$$

$$S = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\sin^2 w} = R \sin w \quad \text{si} \quad \sin w \geq 0$$

$$S = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

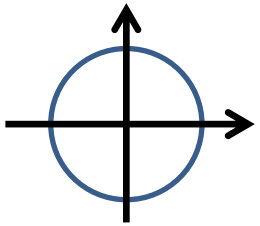
$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\sin^2 w} = R \sin w \quad \text{si} \quad \sin w \geq 0$$

ce qui est … lorsque x est dans [- R ; R]



$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

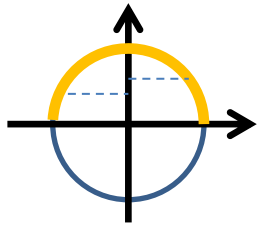
$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\sin^2 w} = R \sin w \quad \text{si} \quad \sin w \geq 0$$

ce qui est le cas lorsque x est dans [- R ; R]



$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

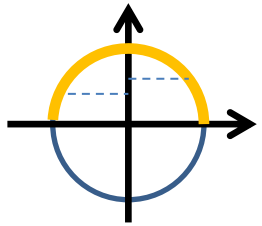
$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\sin^2 w} = R \sin w \quad \text{si} \quad \sin w \geq 0$$

ce qui est le cas lorsque x est dans [- R ; R]



Quand $x = -R$ $w = \ldots$

$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

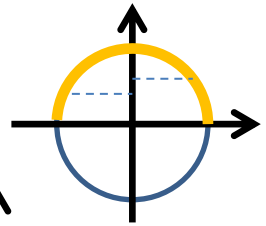
$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

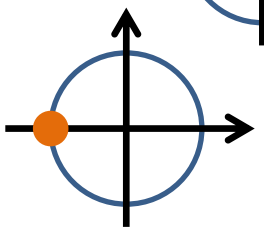
$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\sin^2 w} = R \sin w \quad \text{si} \quad \sin w \geq 0$$

ce qui est le cas lorsque x est dans [- R ; R]



Quand $x = -R$ $\cos w = -1 \Rightarrow w = \pi$



$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

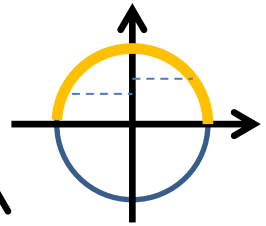
$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

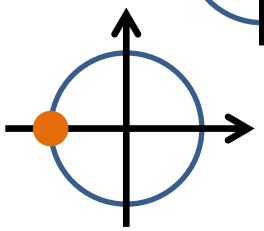
$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\sin^2 w} = R \sin w \quad \text{si} \quad \sin w \geq 0$$

ce qui est le cas lorsque x est dans [- R ; R]



Quand $x = -R$ $\cos w = -1 \Rightarrow w = \pi$



Quand $x = R$ $w = \ldots$

$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

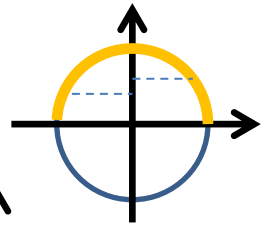
$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

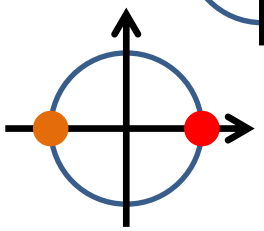
$$= R\sqrt{\sin^2 w} = R \sin w \quad \text{si} \quad \sin w \geq 0$$

ce qui est le cas lorsque x est dans [- R ; R]



Quand $x = -R$ $\cos w = -1 \Rightarrow w = \pi$

Quand $x = R$ $\cos w = 1 \Rightarrow w = 0$



$$S = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\sin^2 w} = R \sin w$$

$$S = 2 \int_{\ldots}^{\ldots} \ldots$$

$$S = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\sin^2 w} = R \sin w$$

$$S = 2 \int_{\pi}^{0} R \sin w\, (-R \sin w\, dw)$$

$$S = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\sin^2 w} = R \sin w$$

$$S = 2 \int_{\pi}^{0} R \sin w\, (-R \sin w\, dw) = \ldots$$

$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

mais on ne connait pas

la primitive de cette fonction !

Changement de variable : $\cos w = x/R$

$\Rightarrow x = R \cos w \Rightarrow x' = dx/dw = R(-\sin w)$

$\Rightarrow dx = -R \sin w\, dw$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R\sqrt{1 - (x/R)^2} = R\sqrt{1 - \cos^2 w}$$

$$= R\sqrt{\sin^2 w} = R \sin w$$

$$S = 2\int_{\pi}^{0} R \sin w\,(-R \sin w\, dw) = -2R^2 \int_{\pi}^{0} \sin^2 w\, dw$$

$$S = -2R^2 \int_{\pi}^{0} \sin^2 w \, dw$$

Mais …

$$\mathbf{S} = -2R^2 \int_{\pi}^{0} \sin^2 w \, dw$$

Mais on ne connait pas la primitive de $\sin^2 w$

sauf si …

$$\mathbf{S} = -2R^2 \int_{\pi}^{0} \sin^2 w \, dw$$

Mais on ne connait pas la primitive de $\sin^2 w$

sauf si on utilise la linéarisation :

…

$$\mathbf{S} = -2R^2 \int_{\pi}^{0} \sin^2 w \, dw$$

Mais on ne connait pas la primitive de $\sin^2 w$

sauf si on utilise la linéarisation :

$$\sin^2 w = \frac{1 - \cos 2w}{2} = 0{,}5 - 0{,}5 \cos 2w$$

$$S = -2R^2 \int_{\pi}^{0} \sin^2 w \, dw$$

On ne connait pas la primitive de $\sin^2 w$

sauf si on utilise la linéarisation :

$$\sin^2 w = 0{,}5 - 0{,}5 \cos 2w$$

$$\Rightarrow S = -2R^2 \left[\ldots \right]_{\pi}^{0}$$

$$S = -2R^2 \int_{\pi}^{0} \sin^2 w \, dw$$

On ne connait pas la primitive de $\sin^2 w$

sauf si on utilise la linéarisation :

$$\sin^2 w = 0{,}5 - 0{,}5 \cos 2w$$

$$\Rightarrow S = -2R^2 \left[0{,}5\, w - 0{,}25 \sin 2w \right]_{\pi}^{0}$$

$$S = -2R^2 \left[\quad \ldots \quad \right]$$

$$S = -2R^2 \int_{\pi}^{0} \sin^2 w \, dw$$

On ne connait pas la primitive de $\sin^2 w$

sauf si on utilise la linéarisation :

$$\sin^2 w = 0{,}5 - 0{,}5 \cos 2w$$

$$\Rightarrow S = -2R^2 \left[0{,}5\, w - 0{,}25 \sin 2w \right]_{\pi}^{0}$$

$$S = -2R^2 \left(0 - 0 - (0{,}5\, \pi - 0) \right) = \ldots$$

$$S = -2R^2 \int_{\pi}^{0} \sin^2 w \, dw$$

On ne connait pas la primitive de $\sin^2 w$

sauf si on utilise la linéarisation :

$$\sin^2 w = 0{,}5 - 0{,}5 \cos 2w$$

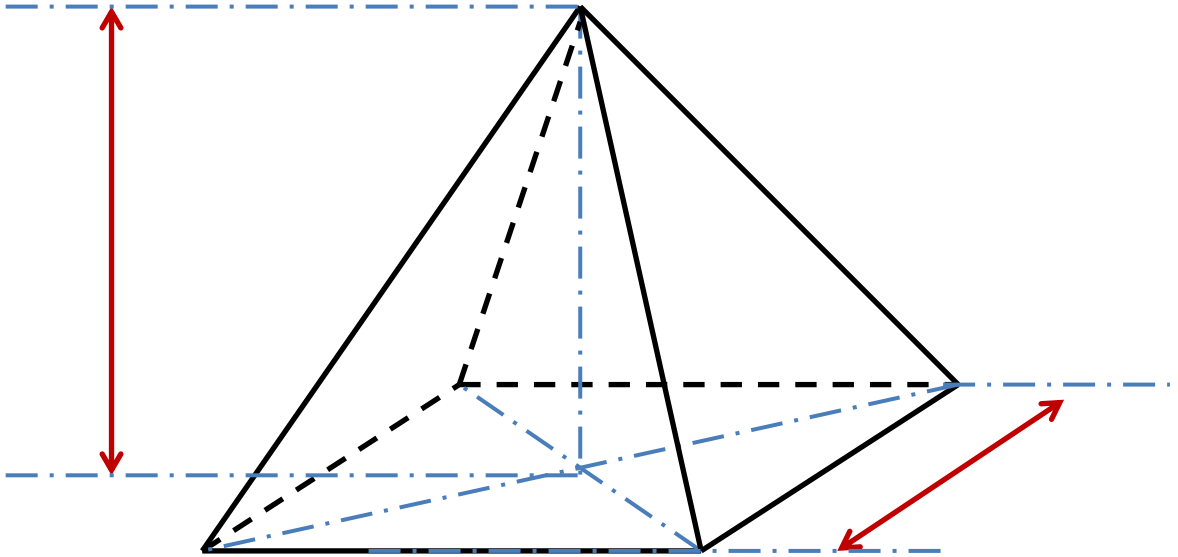
$$\Rightarrow S = -2R^2 \left[0{,}5\, w - 0{,}25 \sin 2w \right]_{\pi}^{0}$$

$$S = -2R^2 \left(0 - 0 - (0{,}5\, \pi - 0) \right) = \pi R^2$$

Exercice 9 :

Déterminez les formules en utilisant les intégrales.

2°) Volume d'une pyramide régulière à base carrée.

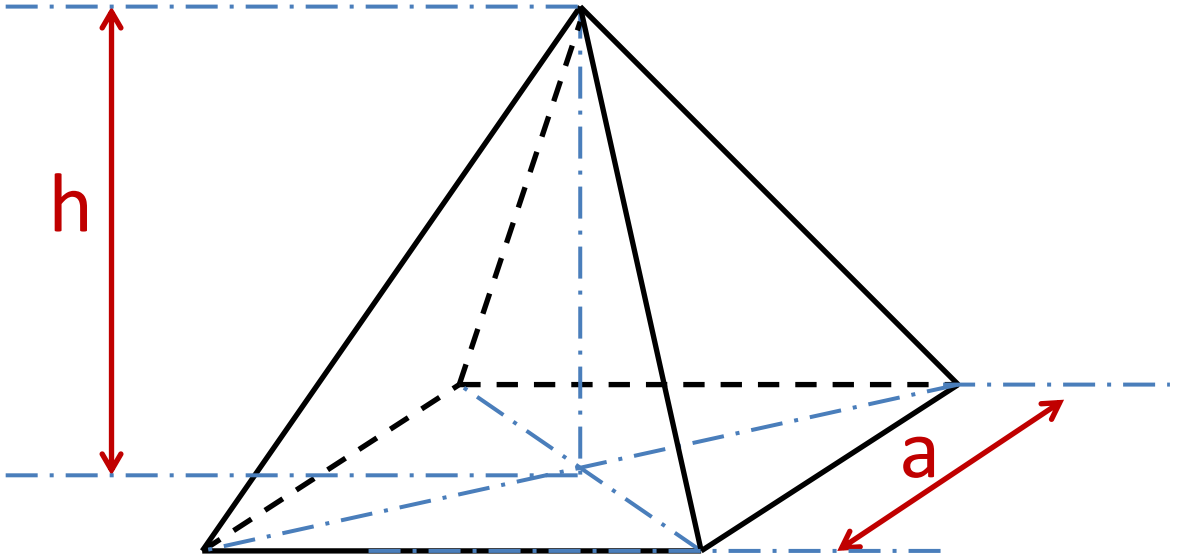


Exercice 9 :

Déterminez les formules en utilisant les intégrales.

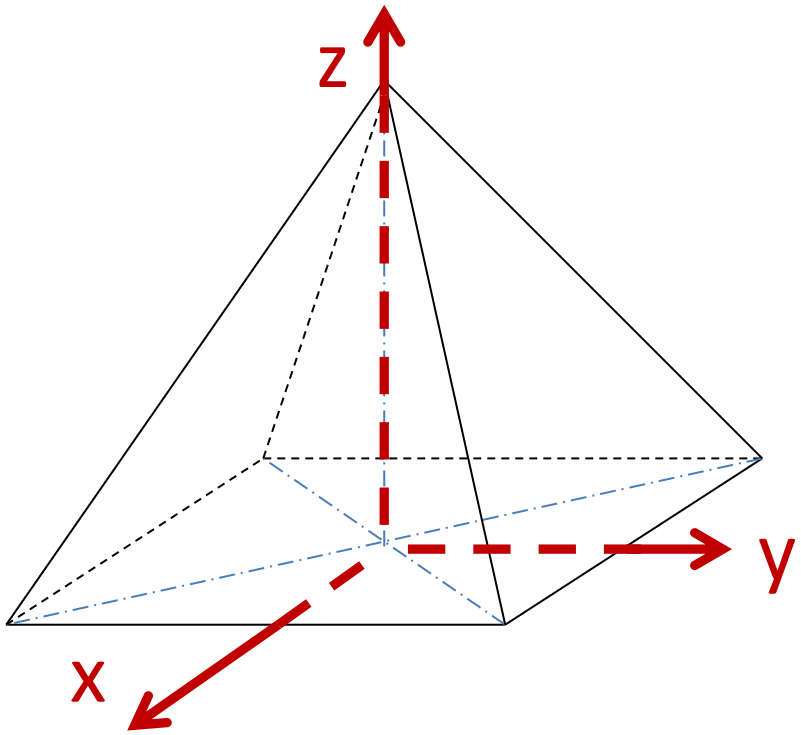
2°) Volume d'une pyramide régulière à base carrée.

hauteur h et base carrée de côté a

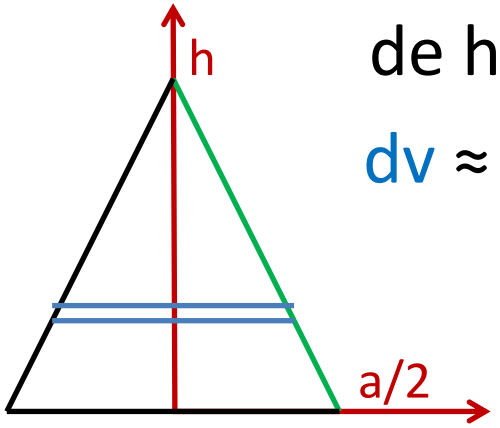


Application des calculs infinitésimaux :

Déterminez le volume d'une **pyramide** régulière, de hauteur h et à base carrée de côté a.



Découpons la pyramide en tranches horizontales

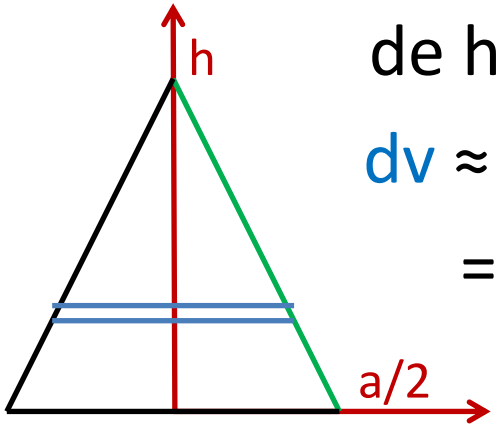


de hauteur dz.

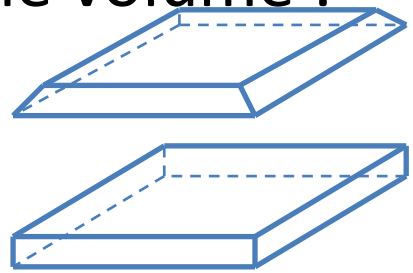
dv ≈ volume du …

Chacune a comme volume :

Découpons la pyramide en tranches horizontales



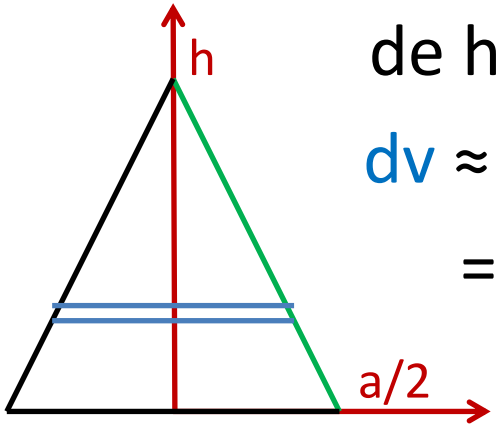
de hauteur dz. Chacune a comme volume :



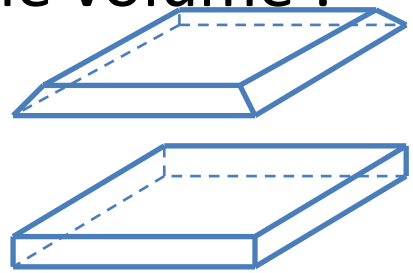
dv ≈ volume du parallélépipède

= …

Découpons la pyramide en tranches horizontales



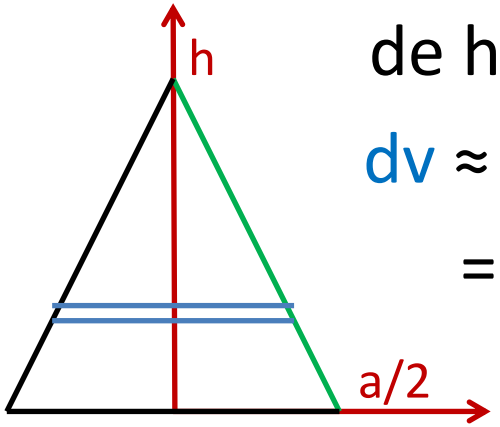
de hauteur dz. Chacune a comme volume :



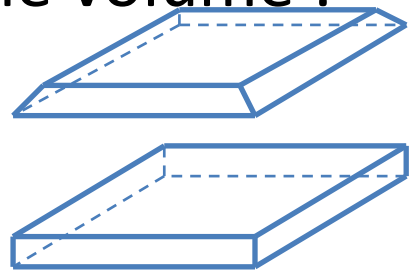
dv ≈ volume du parallélépipède

= base × hauteur = (2x × 2y) × dz

Découpons la pyramide en tranches horizontales



de hauteur dz. Chacune a comme volume :

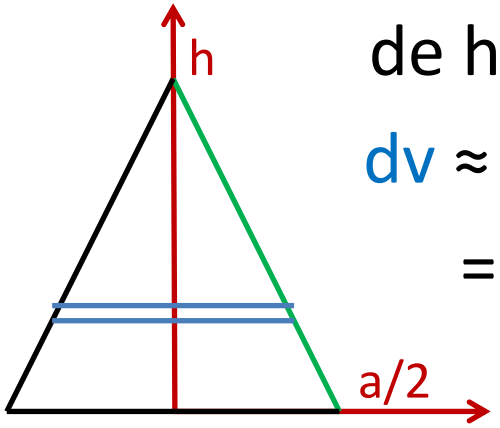


dv ≈ volume du parallélépipède

= base × hauteur = (2x × 2y) × dz

x = y car base carrée, et x dépend de z : x = … z + …

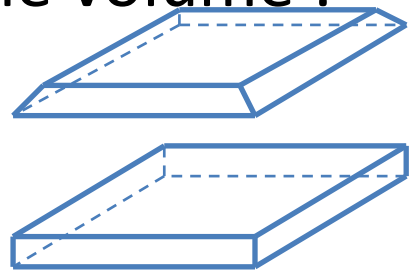
Découpons la pyramide en tranches horizontales



de hauteur dz. Chacune a comme volume :

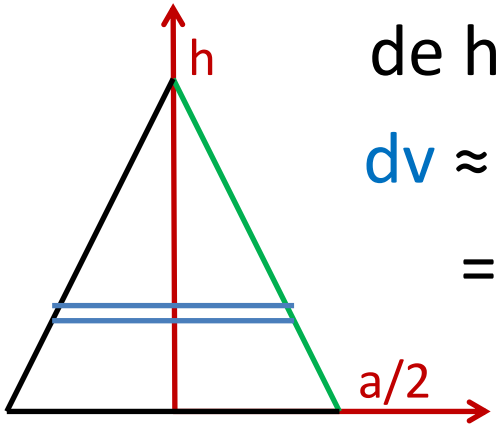
dv ≈ volume du parallélépipède

= base × hauteur = (2x × 2y) × dz



x = y car base carrée, et x dépend de z : $x = \frac{}{2h} z + \frac{}{2}$

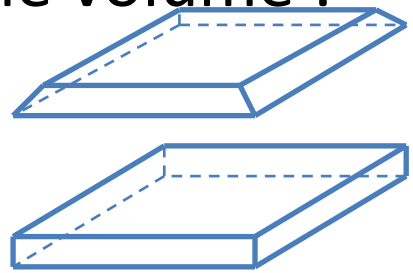
Découpons la pyramide en tranches horizontales



de hauteur dz. Chacune a comme volume :

dv ≈ volume du parallélépipède

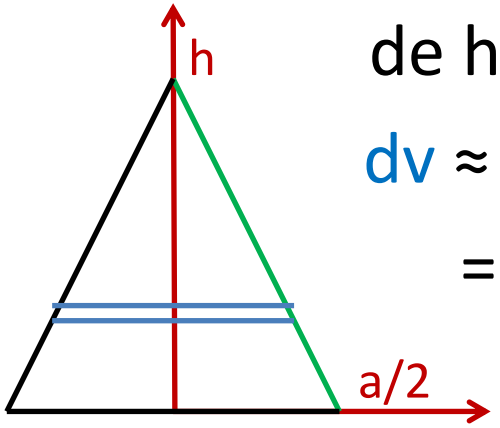
= base × hauteur = (2x × 2y) × dz



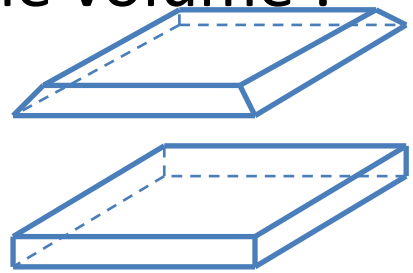
x = y car base carrée, et x dépend de z : $x = \frac{}{2h} z + \frac{}{2}$

$V = \int dv = \int \ldots$

Découpons la pyramide en tranches horizontales



de hauteur dz. Chacune a comme volume :



dv ≈ volume du parallélépipède

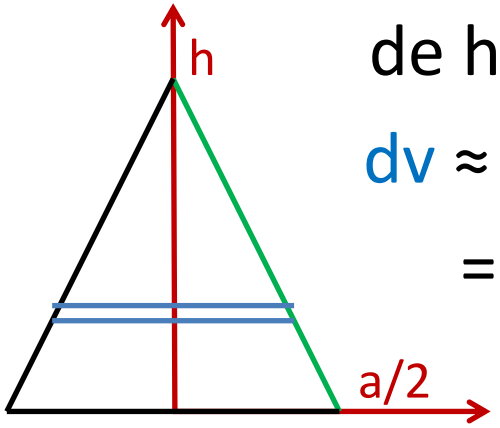
= base × hauteur = (2x × 2y) × dz

- a a

x = y car base carrée, et x dépend de z : $x = \frac{\quad}{2h} z + \frac{\quad}{2}$

$$V = \int dv = \int 4x^2 \, dz = \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

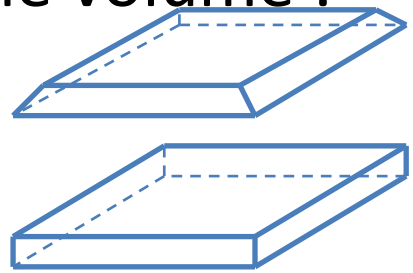
Découpons la pyramide en tranches horizontales



de hauteur dz. Chacune a comme volume :

dv ≈ volume du parallélépipède

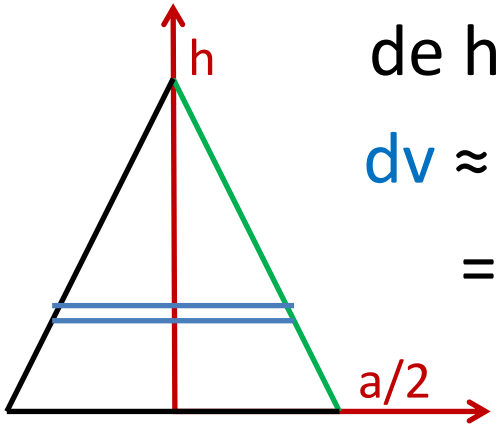
= base × hauteur = (2x × 2y) × dz



x = y car base carrée, et x dépend de z : $x = \frac{-a}{2h} z + \frac{a}{2}$

$$V = \int dv = \int 4x^2\, dz = \int_0^h 4 \left(\frac{-a}{2h} z + \frac{a}{2} \right)^2 dz$$

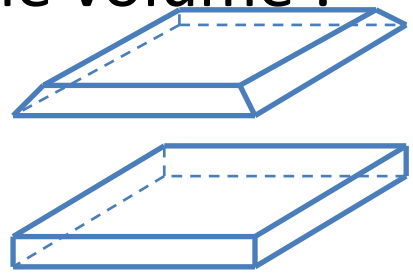
Découpons la pyramide en tranches horizontales



de hauteur dz. Chacune a comme volume :

dv ≈ volume du parallélépipède

= base × hauteur = (2x × 2y) × dz

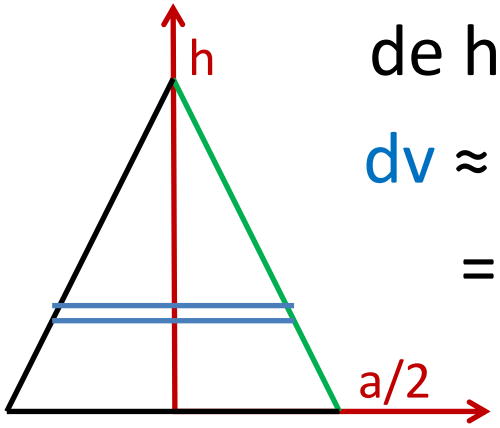


x = y car base carrée, et x dépend de z : $x = \frac{-a}{2h} z + \frac{a}{2}$

$$V = \int dv = \int 4x^2\, dz = \int_0^h 4 \left(\frac{-a}{2h} z + \frac{a}{2} \right)^2 dz$$

$$= 4 \int_0^h \left(\quad \ldots \quad \right) dz$$

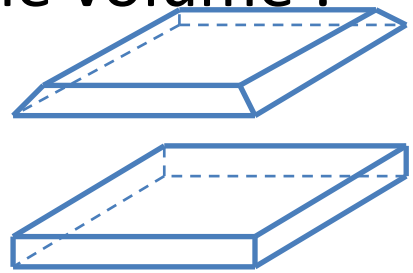
Découpons la pyramide en tranches horizontales



de hauteur dz. Chacune a comme volume :

dv ≈ volume du parallélépipède

= base × hauteur = (2x × 2y) × dz



x = y car base carrée, et x dépend de z : $x = \frac{-a}{2h} z + \frac{a}{2}$

$$V = \int dv = \int 4x^2\, dz = \int_0^h 4 \left(\frac{-a}{2h} z + \frac{a}{2} \right)^2 dz$$

$$= 4 \int_0^h \left(\frac{a^2}{4h^2} z^2 - \frac{a^2}{2h} z + \frac{a^2}{4} \right) dz$$

$$V = \int dv = \int 4x^2\, dz = \int_0^h 4\left(\frac{-a}{2h}z + \frac{a}{2}\right)^2 dz$$

$$= 4\int_0^h \left(\frac{a^2}{4h^2}z^2 - \frac{a^2}{2h}z + \frac{a^2}{4}\right) dz$$

$$= 4\left[\quad \ldots \quad\right]_0^h$$

$$V = \int dv = \int 4x^2\, dz = \int_0^h 4\left(\frac{-a}{2h}z + \frac{a}{2}\right)^2 dz$$

$$= 4\int_0^h \left(\frac{a^2}{4h^2}z^2 - \frac{a^2}{2h}z + \frac{a^2}{4}\right) dz$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{12h^2}z^3 - \frac{a^2}{4h}z^2 + \frac{a^2}{4}z\right)_0^h$$

$$V = \int dv = \int 4x^2\, dz = \int_0^h 4\left(\frac{-a}{2h}z + \frac{a}{2}\right)^2 dz$$

$$= 4\int_0^h \left(\frac{a^2}{4h^2}z^2 - \frac{a^2}{2h}z + \frac{a^2}{4}\right) dz$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{12h^2}z^3 - \frac{a^2}{4h}z^2 + \frac{a^2}{4}z\right)_0^h$$

$$= 4\left(\quad \ldots \quad \right)$$

$$V = \int dv = \int 4x^2\, dz = \int_0^h 4\left(\frac{-a}{2h}z + \frac{a}{2}\right)^2 dz$$

$$= 4\int_0^h \left(\frac{a^2}{4h^2}z^2 - \frac{a^2}{2h}z + \frac{a^2}{4}\right) dz$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{12h^2}z^3 - \frac{a^2}{4h}z^2 + \frac{a^2}{4}z\right)_0^h$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{12h^2}h^3 - \frac{a^2}{4h}h^2 + \frac{a^2}{4}h - (0 - 0 + 0)\right)$$

$$= \ldots$$

$$V = \int dv = \int 4x^2\, dz = \int_0^h 4\left(\frac{-a}{2h}z + \frac{a}{2}\right)^2 dz$$

$$= 4\int_0^h \left(\frac{a^2}{4h^2}z^2 - \frac{a^2}{2h}z + \frac{a^2}{4}\right) dz$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{12h^2}z^3 - \frac{a^2}{4h}z^2 + \frac{a^2}{4}z\right)_0^h$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{12h^2}h^3 - \frac{a^2}{4h}h^2 + \frac{a^2}{4}h - (0 - 0 + 0)\right)$$

$$= 4\, a^2h/12 = a^2\, h\, /\, 3 = \ldots \times \ldots / 3$$

$$V = \int dv = \int 4x^2\, dz = \int_0^h 4\left(\frac{-a}{2h}z + \frac{a}{2}\right)^2 dz$$

$$= 4\int_0^h \left(\frac{a^2}{4h^2}z^2 - \frac{a^2}{2h}z + \frac{a^2}{4}\right) dz$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{12h^2}z^3 - \frac{a^2}{4h}z^2 + \frac{a^2}{4}z\right)_0^h$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{12h^2}h^3 - \frac{a^2}{4h}h^2 + \frac{a^2}{4}h - (0 - 0 + 0)\right)$$

$$= 4\,a^2h/12 = a^2\,h\,/\,3 = \textbf{base} \times \textbf{hauteur / 3}$$

Exercice 9 : Déterminez les formules en utilisant les intégrales.

3°) Température le long d'une tuyauterie de coefficient d'échange K (qui est le ϕ en $W/m^2°C$), transportant un fluide à un débit q_m et chaleur massique C, et à la température initiale T_0, la tuyauterie passant dans une ambiance à température T_a qui est inférieure à T_0

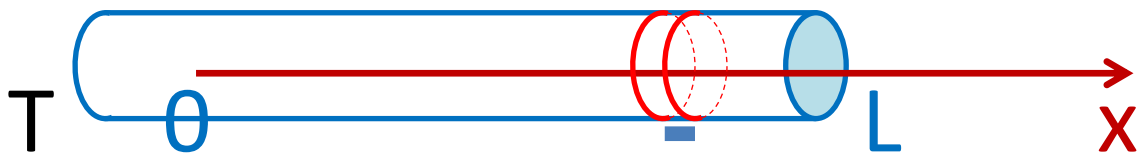
Application des calculs infinitésimaux :

Déterminez la **température** le long d'une tuyauterie.

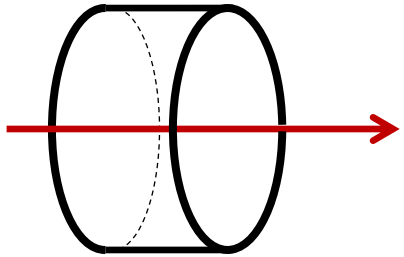
$T_{ambiante}$ débit q_m

Application des calculs infinitésimaux :

Déterminez la **température** le long d'une tuyauterie.

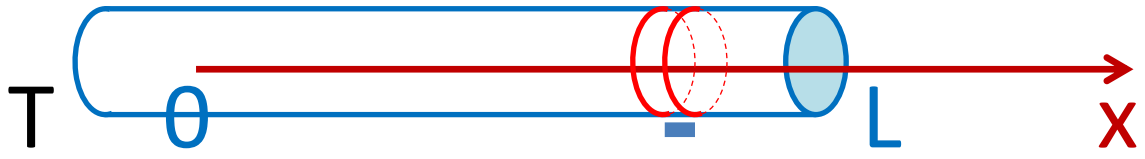


$T_{ambiante}$ débit q_m dx



Application des calculs infinitésimaux :

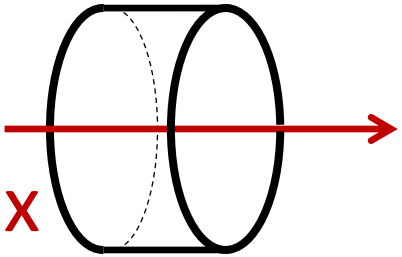
Déterminez la **température** le long d'une tuyauterie.



$T_{ambiante}$ débit q_m dx

L'énergie thermique (par seconde)

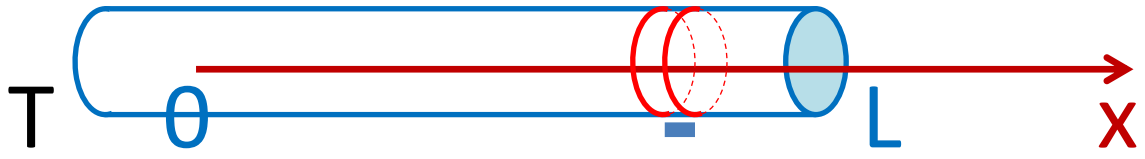
qui traverse la paroi de largeur dx



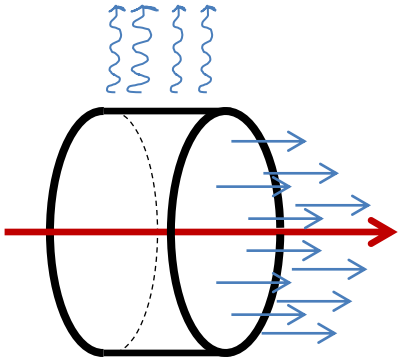
sert à …

Application des calculs infinitésimaux :

Déterminez la **température** le long d'une tuyauterie.



$T_{ambiante}$ débit q_m dx



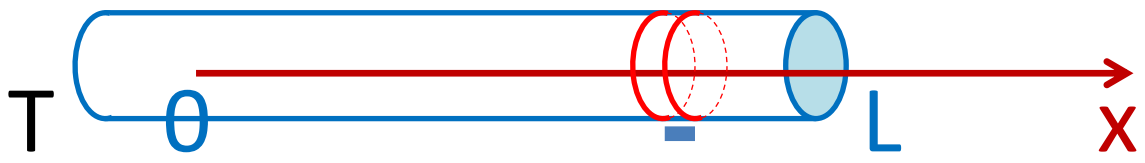
L'énergie thermique (par seconde)

qui traverse la paroi de largeur dx

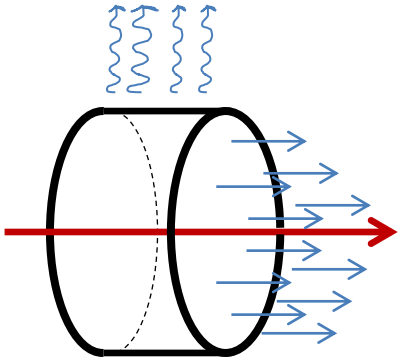
sert à refroidir l'eau : … = …

Application des calculs infinitésimaux :

Déterminez la **température** le long d'une tuyauterie.



$T_{ambiante}$ débit q_m dx



L'énergie thermique (par seconde)

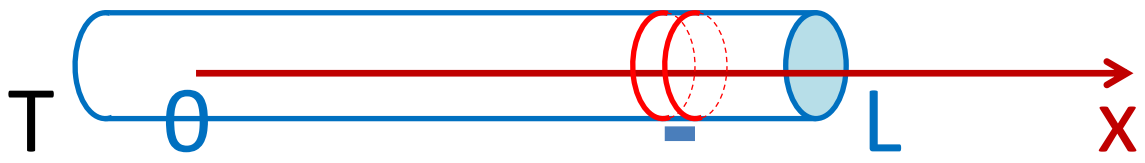
qui traverse la paroi de largeur dx

sert à refroidir l'eau : $K\ S\ \Delta T = q_m\ C\ (-\ dT)$

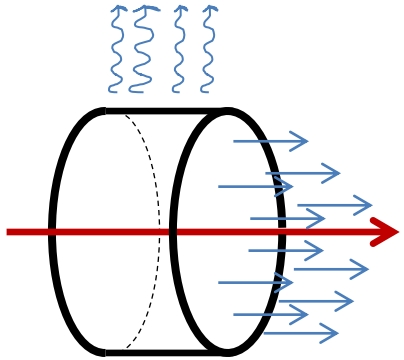
avec $K = \phi$ $S = \ldots$

Application des calculs infinitésimaux :

Déterminez la **température** le long d'une tuyauterie.



$T_{ambiante}$ débit q_m dx



L'énergie thermique (par seconde)

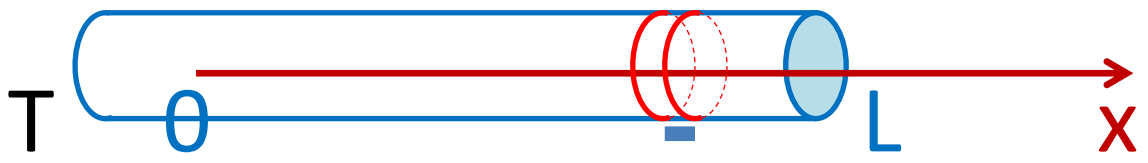
qui traverse la paroi de largeur dx

sert à refroidir l'eau : $K\ S\ \Delta T = q_m\ C\ (-\ dT)$

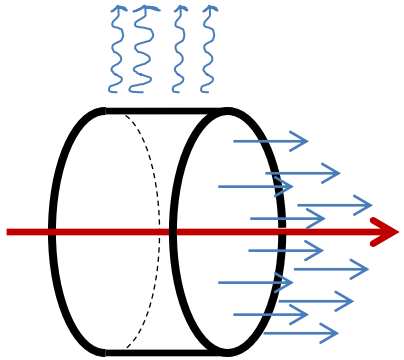
avec $K = \phi$ $S = \text{circonférence} \times dx = \pi D\ dx$

Application des calculs infinitésimaux :

Déterminez la **température** le long d'une tuyauterie.



$T_{ambiante}$ débit q_m dx



L'énergie thermique (par seconde)

qui traverse la paroi de largeur dx

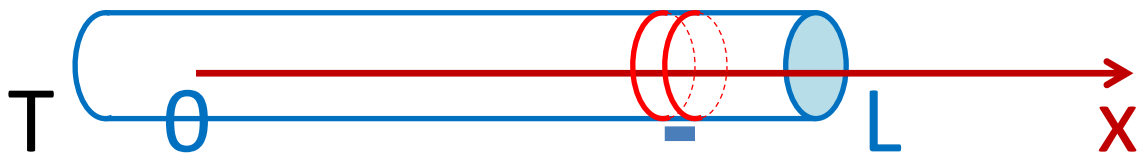
sert à refroidir l'eau : $K\ S\ \Delta T = q_m\ C\ (-\ dT)$

avec $K = \phi$ $S = \text{circonférence} \times dx = \pi D\ dx$

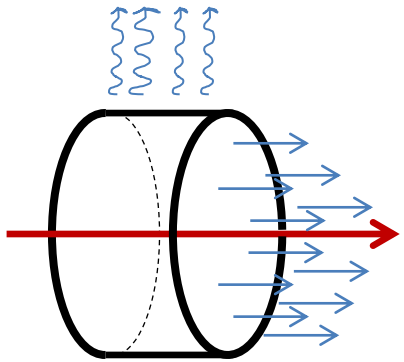
$T_{moyenne} \approx \ldots$

Application des calculs infinitésimaux :

Déterminez la **température** le long d'une tuyauterie.



$T_{ambiante}$ débit q_m dx



L'énergie thermique (par seconde)

qui traverse la paroi de largeur dx

sert à refroidir l'eau : $K\ S\ \Delta T = q_m\ C\ (-\ dT)$

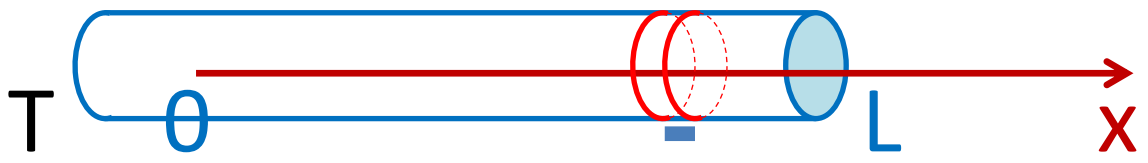
avec $K = \phi$ $S = \text{circonférence} \times dx = \pi D\ dx$

$T_{moyenne} \approx (T_x + T_{x+dx}) / 2 \approx T_x$

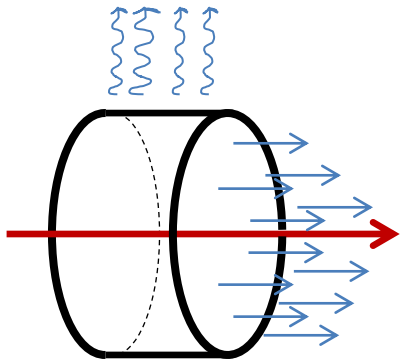
➡ $K \ldots = q_m\ C\ (-\ dT)$

Application des calculs infinitésimaux :

Déterminez la **température** le long d'une tuyauterie.



$T_{ambiante}$ débit q_m dx



L'énergie thermique (par seconde)

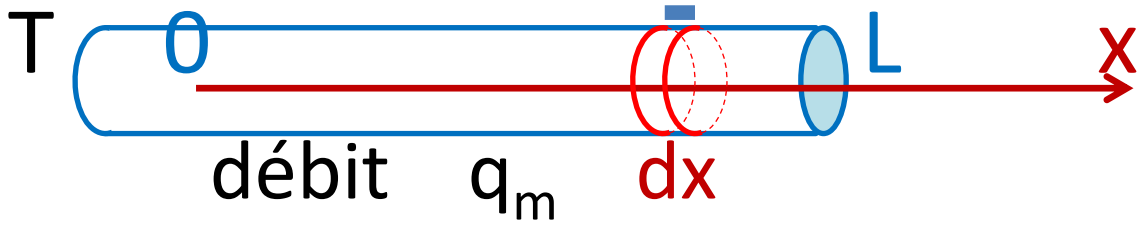
qui traverse la paroi de largeur dx

sert à refroidir l'eau : $K\ S\ \Delta T = q_m\ C\ (-\ dT)$

avec $K = \phi$ $S = \text{circonférence} \times dx = \pi D\ dx$

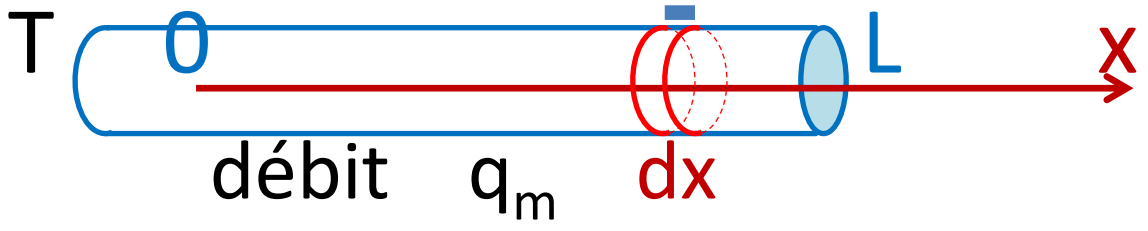
$T_{moyenne} \approx (T_x + T_{x+dx}) / 2 \approx T_x$

$\Rightarrow K\ \pi D\ (T - T_a)\ dx = q_m\ C\ (-\ dT)$



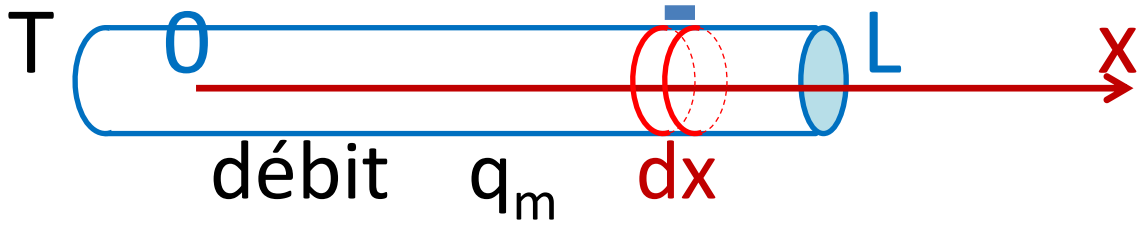
$$K \pi D (T - T_a) dx = q_m C (- dT)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{- K \pi D}{q_m C} dx = \ldots$$



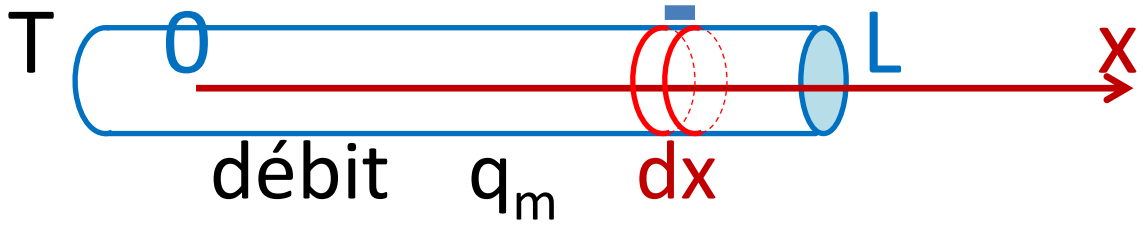
$$K \pi D (T - T_a) dx = q_m C (- dT)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{- K \pi D}{q_m C} dx = \frac{1}{T - T_a} dT$$



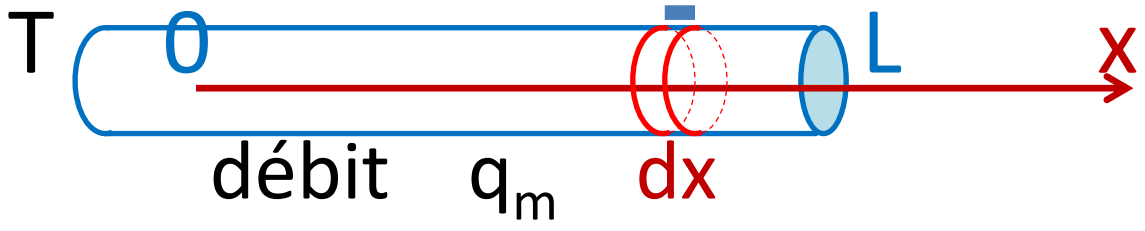
$$K \pi D (T - T_a) dx = q_m C (- dT)$$

$$\Rightarrow \int_{\dots}^{\dots} \frac{- K \pi D}{q_m C} dx = \int_{\dots}^{\dots} \frac{1}{T - T_a} dT$$



$$K \pi D (T - T_a) dx = q_m C (- dT)$$

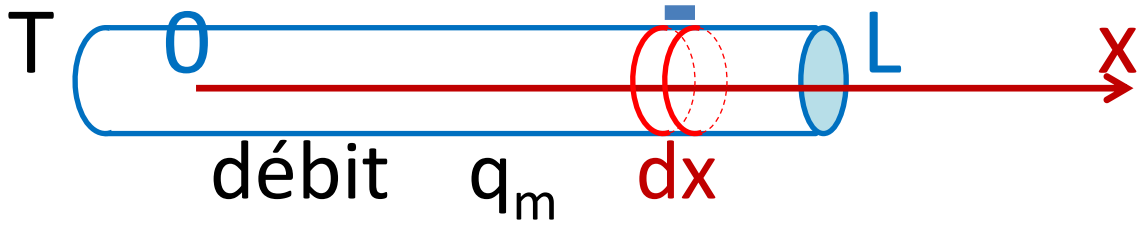
$$\Rightarrow \int_0^L \frac{- K \pi D}{q_m C} dx = \int_{T_0}^{T_L} \frac{1}{T - T_a} dT$$



$$K \pi D (T - T_a) dx = q_m C (- dT)$$

$$\Rightarrow \int_0^L \frac{- K \pi D}{q_m C} dx = \int_{T_0}^{T_L} \frac{1}{T - T_a} dT$$

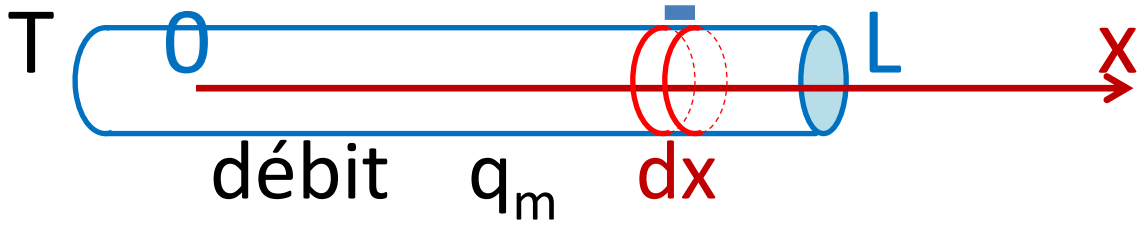
$$\Rightarrow \Big(\ldots \Big)_0^L = \Big(\ldots \Big)_{T_0}^{T_L}$$



$$K \pi D (T - T_a) dx = q_m C (- dT)$$

$$\Rightarrow \int_0^L \frac{- K \pi D}{q_m C} dx = \int_{T_0}^{T_L} \frac{1}{T - T_a} dT$$

$$\Rightarrow \left(\frac{- K \pi D}{q_m C} x \right)_0^L = \left(\ln(T - T_a) \right)_{T_0}^{T_L}$$

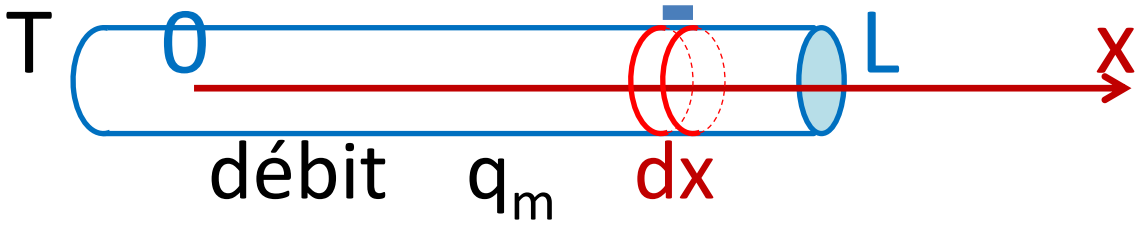


$$K \pi D (T - T_a) dx = q_m C (- dT)$$

$$\Rightarrow \int_0^L \frac{- K \pi D}{q_m C} dx = \int_{T_0}^{T_L} \frac{1}{T - T_a} dT$$

$$\Rightarrow \left(\frac{- K \pi D}{q_m C} x \right)_0^L = \left(\ln(T - T_a) \right)_{T_0}^{T_L}$$

$$\Rightarrow \ldots = \ldots$$



$$K \pi D (T - T_a) dx = q_m C (- dT)$$

$$\Rightarrow \int_0^L \frac{- K \pi D}{q_m C} dx = \int_{T_0}^{T_L} \frac{1}{T - T_a} dT$$

$$\Rightarrow \left(\frac{- K \pi D}{q_m C} x \right)_0^L = \left(\ln(T - T_a) \right)_{T_0}^{T_L}$$

$$\Rightarrow (- K \pi D / q_m C) L - 0 = \ln(T_L - T_a) - \ln(T_0 - T_a)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-K \pi D}{q_m C} x \right)_0^L = \left(\ln(T - T_a) \right)_{T_0}^{T_L}$$

$$\Rightarrow (-K \pi D / q_m C) L - 0 = \ln(T_L - T_a) - \ln(T_0 - T_a)$$

$$\Rightarrow \frac{-K \pi D}{q_m C} L = \ln \ \ldots$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-K \pi D}{q_m C} x \right)_0^L = \left(\ln(T - T_a) \right)_{T_0}^{T_L}$$

$$\Rightarrow (-K \pi D / q_m C) L - 0 = \ln(T_L - T_a) - \ln(T_0 - T_a)$$

$$\Rightarrow \frac{-K \pi D}{q_m C} L = \ln \frac{T_L - T_a}{T_0 - T_a}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-K \pi D}{q_m C} x \right)_0^L = \left(\ln(T - T_a) \right)_{T_0}^{T_L}$$

$$\Rightarrow (-K \pi D / q_m C) L - 0 = \ln(T_L - T_a) - \ln(T_0 - T_a)$$

$$\Rightarrow \frac{-K \pi D}{q_m C} L = \ln \frac{T_L - T_a}{T_0 - T_a} \Rightarrow \frac{T_L - T_a}{T_0 - T_a} = \ldots$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-K\pi D}{q_m C} x \right)_0^L = \left(\ln(T - T_a) \right)_{T_0}^{T_L}$$

$$\Rightarrow (-K\pi D / q_m C) L - 0 = \ln(T_L - T_a) - \ln(T_0 - T_a)$$

$$\Rightarrow \frac{-K\pi D}{q_m C} L = \ln \frac{T_L - T_a}{T_0 - T_a} \Rightarrow \frac{T_L - T_a}{T_0 - T_a} = e^{-\frac{K\pi D}{q_m C} L}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-K \pi D}{q_m C} x \right)_0^L = \left(\ln(T - T_a) \right)_{T_0}^{T_L}$$

$$\Rightarrow (-K \pi D / q_m C) L - 0 = \ln(T_L - T_a) - \ln(T_0 - T_a)$$

$$\Rightarrow \frac{-K \pi D}{q_m C} L = \ln \frac{T_L - T_a}{T_0 - T_a} \Rightarrow \frac{T_L - T_a}{T_0 - T_a} = e^{-\frac{K \pi D}{q_m C} L}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_L = \ldots}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-K\pi D}{q_m C} x \right)_0^L = \left(\ln(T - T_a) \right)_{T_0}^{T_L}$$

$$\Rightarrow (-K\pi D / q_m C) L - 0 = \ln(T_L - T_a) - \ln(T_0 - T_a)$$

$$\Rightarrow \frac{-K\pi D}{q_m C} L = \ln \frac{T_L - T_a}{T_0 - T_a} \Rightarrow \frac{T_L - T_a}{T_0 - T_a} = e^{-\frac{K\pi D}{q_m C} L}$$

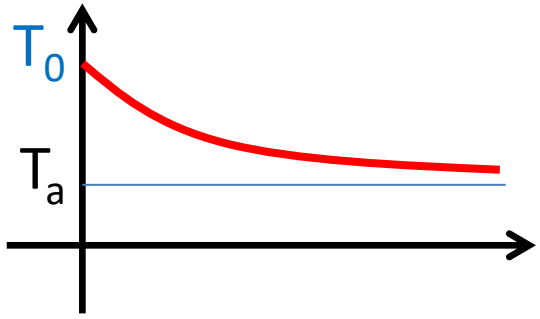
$$\Rightarrow \boxed{T_L = T_a + (T_0 - T_a)\, e^{-\frac{K\pi D}{q_m C} L}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-K\pi D}{q_m C} x \right)_0^L = \left(\ln(T - T_a) \right)_{T_0}^{T_L}$$

$$\Rightarrow (-K\pi D / q_m C)\, L - 0 = \ln(T_L - T_a) - \ln(T_0 - T_a)$$

$$\Rightarrow \frac{-K\pi D}{q_m C} L = \ln \frac{T_L - T_a}{T_0 - T_a} \Rightarrow \frac{T_L - T_a}{T_0 - T_a} = e^{-\frac{K\pi D}{q_m C} L}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_L = T_a + (T_0 - T_a)\, e^{-\frac{K\pi D}{q_m C} L}}$$



Exercice 9 : Déterminez les formules en utilisant les intégrales.

4°) Température d'une masse de lait,

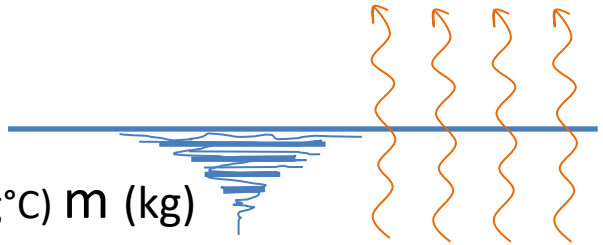
à une température initiale T_0

et en contact avec une ambiance à température $T_{pièce}$

qui est inférieure à T_0

4°) Température d'une masse de lait, à une température initiale T_0

pièce $T_{pièce}$ (°C)

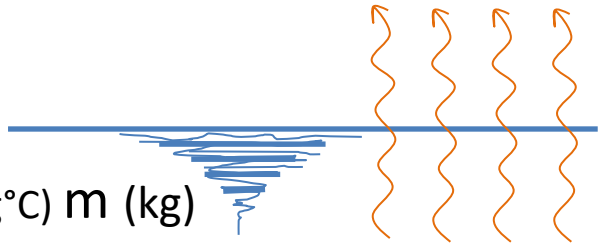


lait T (°C) C (J/kg°C) m (kg)

échange thermique ϕ (W/m²°C) S (m²)

4°) Température d'une masse de lait, à une température initiale T_0

pièce $T_{pièce}$ (°C)



lait T (°C) C (J/kg°C) m (kg)

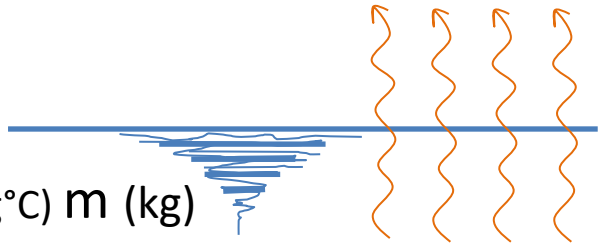
échange thermique ϕ (W/m²°C) S (m²)

Pendant une durée infinitésimale dt :

Energie récupérée par la pièce = Energie perdue par le lait

4°) Température d'une masse de lait, à une température initiale T_0

pièce $T_{pièce}$ (°C)



lait T (°C) C (J/kg°C) m (kg)

échange thermique ϕ (W/m²°C) S (m²)

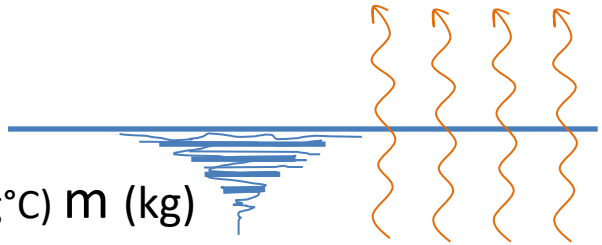
Pendant une durée infinitésimale dt :

Energie récupérée par la pièce = Energie perdue par le lait

$\Leftrightarrow$ $\phi S (T - T_{pièce}) dt = m C (- dT)$

4°) Température d'une masse de lait, à une température initiale T_0

pièce $T_{pièce}$ (°C)



lait T (°C) C (J/kg°C) m (kg)

échange thermique ϕ (W/m²°C) S (m²)

Pendant une durée infinitésimale dt :

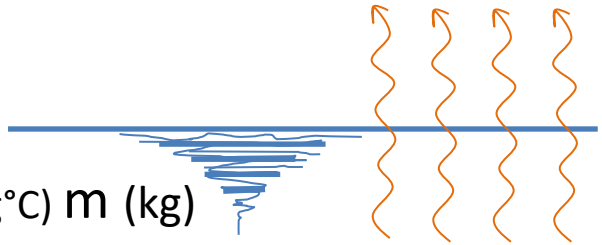
Energie récupérée par la pièce = Energie perdue par le lait

$$\Leftrightarrow \quad \phi\, S\, (T - T_{pièce})\, dt = m\, C\, (-dT)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-\phi\, S}{m\, C}\,(T - T_{pièce}) = \frac{dT}{dt}$$

4°) Température d'une masse de lait, à une température initiale T_0

pièce $T_{pièce}$ (°C)



lait T (°C) C (J/kg°C) m (kg)

échange thermique ϕ (W/m²°C) S (m²)

Pendant une durée infinitésimale dt :

Energie récupérée par la pièce = Energie perdue par le lait

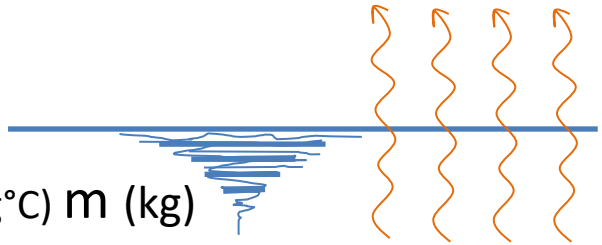
$$\Leftrightarrow \phi S (T - T_{pièce}) dt = m C (- dT)$$

$$\Leftrightarrow \frac{- \phi S}{m C} (T - T_{pièce}) = \frac{dT}{dt} \Leftrightarrow T' = a (T - T_{pièce})$$

avec $a = \frac{- \phi S}{m C}$

4°) Température d'une masse de lait, à une température initiale T_0

pièce $T_{pièce}$ (°C)



échange thermique ϕ (W/m²°C) S (m²)

lait T (°C) C (J/kg°C) m (kg)

Pendant une durée infinitésimale dt :

Energie récupérée par la pièce = Energie perdue par le lait

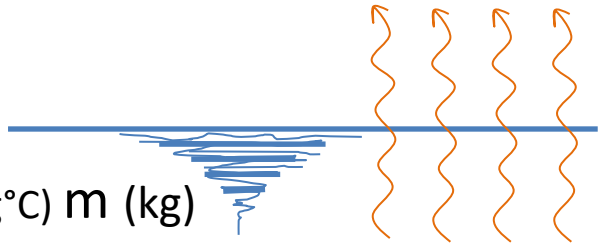
$$\Leftrightarrow \quad \phi S (T - T_{pièce}) dt = m C (- dT)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{- \phi S}{m C} (T - T_{pièce}) = \frac{dT}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad T' = a (T - T_{pièce}) = a T + b$$

avec $a = \frac{- \phi S}{m C}$ et $b = - a T_{pièce}$

4°) Température d'une masse de lait, à une température initiale T_0

pièce $T_{pièce}$ (°C)



lait T (°C) C (J/kg°C) m (kg)

échange thermique ϕ (W/m²°C) S (m²)

Pendant une durée infinitésimale dt :

Energie récupérée par la pièce = Energie perdue par le lait

$$\Leftrightarrow \phi S (T - T_{pièce}) dt = m C (- dT)$$

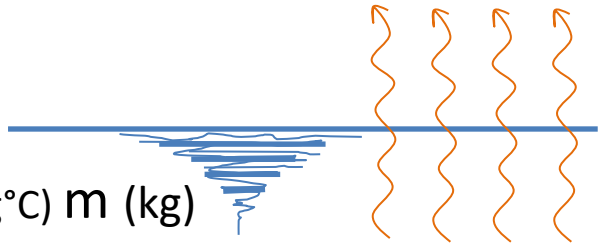
$$\Leftrightarrow \frac{- \phi S}{m C} (T - T_{pièce}) = \frac{dT}{dt} \Leftrightarrow T' = a (T - T_{pièce}) = a T + b$$

avec $a = \frac{- \phi S}{m C}$ et $b = - a T_{pièce}$

$\Rightarrow$ solution $T = k e^{at} - b/a$

4°) Température d'une masse de lait, à une température initiale T_0

pièce $T_{pièce}$ (°C)



échange thermique ϕ (W/m²°C) S (m²)

lait T (°C) C (J/kg°C) m (kg)

Pendant une durée infinitésimale dt :

Energie récupérée par la pièce = Energie perdue par le lait

$$\Leftrightarrow \quad \phi\, S\, (T - T_{pièce})\, dt = m\, C\, (-dT)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-\phi\, S}{m\, C}\,(T - T_{pièce}) = \frac{dT}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad T' = a\,(T - T_{pièce}) = a\,T + b$$

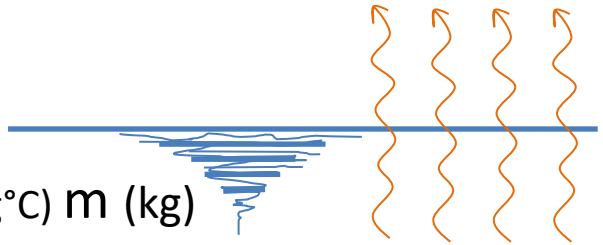
avec $a = \frac{-\phi\, S}{m\, C}$ et $b = -\,a\, T_{pièce}$

$\Rightarrow$ solution $T = k\, e^{at} - b/a$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-\,a\, T_{pièce}}{a} = T_{pièce} \quad \Rightarrow \quad T = k\, e^{at} + T_{pièce}$$

4°) Température d'une masse de lait, à une température initiale T_0

pièce $T_{pièce}$ (°C)



lait T (°C) C (J/kg°C) m (kg)

échange thermique ϕ (W/m²°C) S (m²)

Pendant une durée infinitésimale dt :

Energie récupérée par la pièce = Energie perdue par le lait

$$\Leftrightarrow \quad \phi S \, (T - T_{pièce}) \, dt = m \, C \, (- dT)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{- \phi S}{m C} \, (T - T_{pièce}) = \frac{dT}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad T' = a \, (T - T_{pièce}) = a \, T + b$$

avec $a = \frac{- \phi S}{m C}$ et $b = - a \, T_{pièce}$

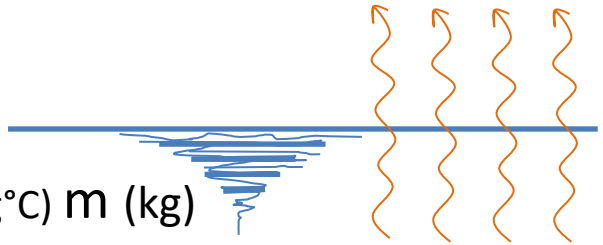
$\Rightarrow$ solution $T = k \, e^{at} - b/a$

$$- \frac{b}{a} = - \frac{- a \, T_{pièce}}{a} = T_{pièce} \quad \Rightarrow \quad T = k \, e^{at} + T_{pièce}$$

$$T(0) = k \, e^{a(0)} + T_{pièce} \quad \Rightarrow \quad k = T_0 - T_{pièce}$$

4°) Température d'une masse de lait, à une température initiale T_0

pièce $T_{pièce}$ (°C)



échange thermique ϕ (W/m²°C) S (m²)

lait T (°C) C (J/kg°C) m (kg)

Pendant une durée infinitésimale dt :

Energie récupérée par la pièce = Energie perdue par le lait

$$\Leftrightarrow \quad \phi\, S\, (T - T_{pièce})\, dt = m\, C\, (-dT)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-\phi\, S}{m\, C}\,(T - T_{pièce}) = \frac{dT}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad T' = a\,(T - T_{pièce}) = a\,T + b$$

avec $a = \dfrac{-\phi\, S}{m\, C}$ et $b = -\,a\,T_{pièce}$

$\Rightarrow$ solution $T = k\, e^{at} - b/a$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-a\,T_{pièce}}{a} = T_{pièce} \quad \Rightarrow \quad T = k\, e^{at} + T_{pièce}$$

$$T(0) = k\, e^{a(0)} + T_{pièce} \quad \Rightarrow \quad k = T_0 - T_{pièce} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = (T_0 - T_{pièce})\, e^{at} + T_{pièce}}$$