Exercice 11 :

1°) Soit une fonction f définie sur un intervalle $[\ a\ ;\ b\ ]$ ayant un minimum m et un maximum M.

Démontrez alors que la valeur moyenne des images est encadrée par m et M.

2°) Démontrez que si une fonction

définie sur $[\ 0\ ;\ nT\ ]$ (n entier ≥ 1)

est périodique de période T,

alors sa moyenne est la moyenne sur un intervalle d'amplitude T.

Exercice 11 :

1°) Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a ; b]$ ayant un minimum m et un maximum M.

Démontrez alors que la valeur moyenne des images est encadrée par m et M.

1°) f a un minimum **m** et un maximum **M**. Démontrez alors que la moyenne est encadrée par **m** et **M**.

f(x) …

1°) f a un minimum **m** et un maximum **M**. Démontrez alors que la moyenne est encadrée par **m** et **M**.

$m \leq f(x) \leq M$

$\Rightarrow$ …

1°) f a un minimum **m** et un maximum **M**. Démontrez alors que la moyenne est encadrée par **m** et **M**.

$m \leq f(x) \leq M$ Croissance de l'intégrale

$$\Rightarrow \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$$

$\Leftrightarrow$ …

1°) f a un minimum **m** et un maximum **M**. Démontrez alors que la moyenne est encadrée par **m** et **M**.

$m \leq f(x) \leq M$ Croissance de l'intégrale

$$\Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b m\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,dx$$

$\Leftrightarrow$ …

1°) f a un minimum **m** et un maximum **M**. Démontrez alors que la moyenne est encadrée par **m** et **M**.

$m \leq f(x) \leq M$ Croissance de l'intégrale

$$\Rightarrow \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b m \, dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \, dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M \, dx$$

$$\frac{1}{b-a}\Big[mx \Big]_a^b \leq \mu \leq \frac{1}{b-a}\Big[Mx \Big]_a^b$$

$\Leftrightarrow$ ...

1°) f a un minimum **m** et un maximum **M**. Démontrez alors que la moyenne est encadrée par **m** et **M**.

$m \leq f(x) \leq M$ Croissance de l'intégrale

$$\Rightarrow \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b m \, dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b M \, dx$$

$$\frac{1}{b-a} \Big[mx \Big]_a^b \leq \mu \leq \frac{1}{b-a} \Big[Mx \Big]_a^b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a} (mb - ma) \leq \mu \leq \frac{1}{b-a} (Mb - Ma)$$

...

1°) f a un minimum **m** et un maximum **M**. Démontrez alors que la moyenne est encadrée par **m** et **M**.

$m \leq f(x) \leq M$ Croissance de l'intégrale

$$\Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b m\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,dx$$

$$\frac{1}{b-a}\Big(mx\Big)_a^b \leq \mu \leq \frac{1}{b-a}\Big(Mx\Big)_a^b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a}(\,mb - ma\,) \leq \mu \leq \frac{1}{b-a}(\,Mb - Ma\,)$$

$$\Leftrightarrow \ldots$$

1°) f a un minimum **m** et un maximum **M**. Démontrez alors que la moyenne est encadrée par **m** et **M**.

$m \leq f(x) \leq M$ Croissance de l'intégrale

$$\Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b m\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,dx$$

$$\frac{1}{b-a}\Big[mx\Big]_a^b \leq \mu \leq \frac{1}{b-a}\Big[Mx\Big]_a^b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a}(mb-ma) \leq \mu \leq \frac{1}{b-a}(Mb-Ma)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a}m(b-a) \leq \mu \leq \frac{1}{b-a}M(b-a)$$

1°) f a un minimum **m** et un maximum **M**. Démontrez alors que la moyenne est encadrée par **m** et **M**.

$m \leq f(x) \leq M$ Croissance de l'intégrale

$$\Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b m\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,dx$$

$$\frac{1}{b-a}\Big(mx\Big)_a^b \leq \mu \leq \frac{1}{b-a}\Big(Mx\Big)_a^b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a}(\,mb - ma\,) \leq \mu \leq \frac{1}{b-a}(\,Mb - Ma\,)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m \leq \mu \leq M}$$

2°)

$\mu_{[0\,;\,nT]} = \ldots$

2°)

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT - 0} \int_{0}^{nT} f(x)\,dx$$

2°)

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0}\int_{0}^{nT} f(x)\,dx$$

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0}\left[\;\ldots + \ldots + \ldots + \ldots\;\right]$$

2°)

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0} \int_{0}^{nT} f(x)\,dx$$

Relation de Chasles

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0} \left[\int_{0}^{T} f(x)\,dx + \int_{T}^{2T} f(x)\,dx + \ldots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx \right]$$

2°)

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0}\int_0^{nT} f(x)\,dx$$

Relation de Chasles

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0}\left[\int_0^{T} f(x)\,dx + \int_T^{2T} f(x)\,dx + \ldots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx\right]$$

$$= \ldots \left[\ \ldots \int_0^{T} f(x)\,dx + \ldots + \ \ldots \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx\right]$$

2°)

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0}\int_0^{nT} f(x)\,dx$$

Relation de Chasles

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0}\left[\int_0^{T} f(x)\,dx + \int_T^{2T} f(x)\,dx + \dots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{T-0}\int_0^{T} f(x)\,dx + \dots + \frac{1}{T-0}\int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx\right]$$

2°)

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0}\int_0^{nT} f(x)\,dx$$

Relation de Chasles

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0}\left[\int_0^{T} f(x)\,dx + \int_T^{2T} f(x)\,dx + \dots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{T-0}\int_0^{T} f(x)\,dx + \dots + \frac{1}{T-0}\int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx\right]$$

$$= (1/n)\left[\ \dots + \dots + \dots + \dots\ \right]$$

2°)

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0}\int_0^{nT} f(x)\,dx$$

Relation de Chasles

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0}\left[\int_0^{T} f(x)\,dx + \int_T^{2T} f(x)\,dx + \ldots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{T-0}\int_0^{T} f(x)\,dx + \ldots + \frac{1}{T-0}\int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx\right]$$

$$= (1/n)\left[\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n\right] = \ldots$$

2°)

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0}\int_{0}^{nT} f(x)\,dx$$

Relation de Chasles

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \frac{1}{nT-0}\left[\int_{0}^{T} f(x)\,dx + \int_{T}^{2T} f(x)\,dx + \dots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{T-0}\int_{0}^{T} f(x)\,dx + \dots + \frac{1}{T-0}\int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx\right]$$

$$= (1/n)\left[\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n\right] = (1/n)\left[n\,\mu_1\right] = \dots$$

2°)

$$\mu_{[0\,;\,nT]} = \frac{1}{nT-0}\int_0^{nT} f(x)\,dx$$

$$\boxed{\begin{gathered}\mu_{[0\,;\,nT]} = \mu_{[0\,;\,1T]}\\ \text{si f périodique de période T}\end{gathered}}$$

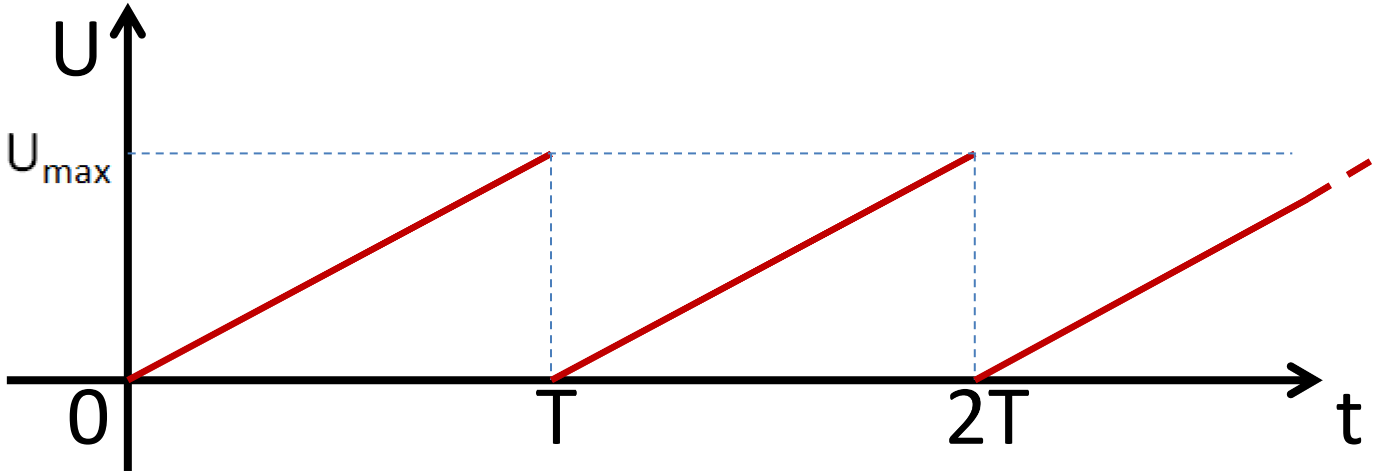
Relation de Chasles

$$\mu_{[0\,;\,nT]} = \frac{1}{nT-0}\left[\int_0^{T} f(x)\,dx + \int_T^{2T} f(x)\,dx + \dots + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{T-0}\int_0^{T} f(x)\,dx + \dots + \frac{1}{T-0}\int_{(n-1)T}^{nT} f(x)\,dx\right]$$

$$= (1/n)\left[\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n\right] = (1/n)\left[n\,\mu_1\right] = \mu_{[0\,;\,1T]}$$

Exo 12 : La tension U est définie et périodique sur [0 ; 10T].

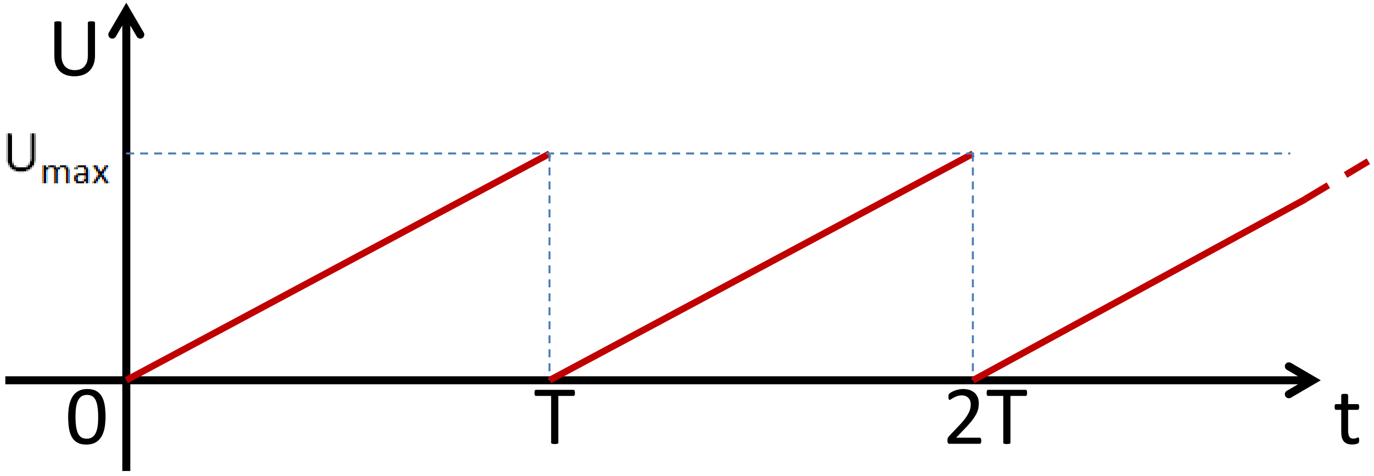


Déterminez sa valeur moyenne,

et sa valeur efficace définie par

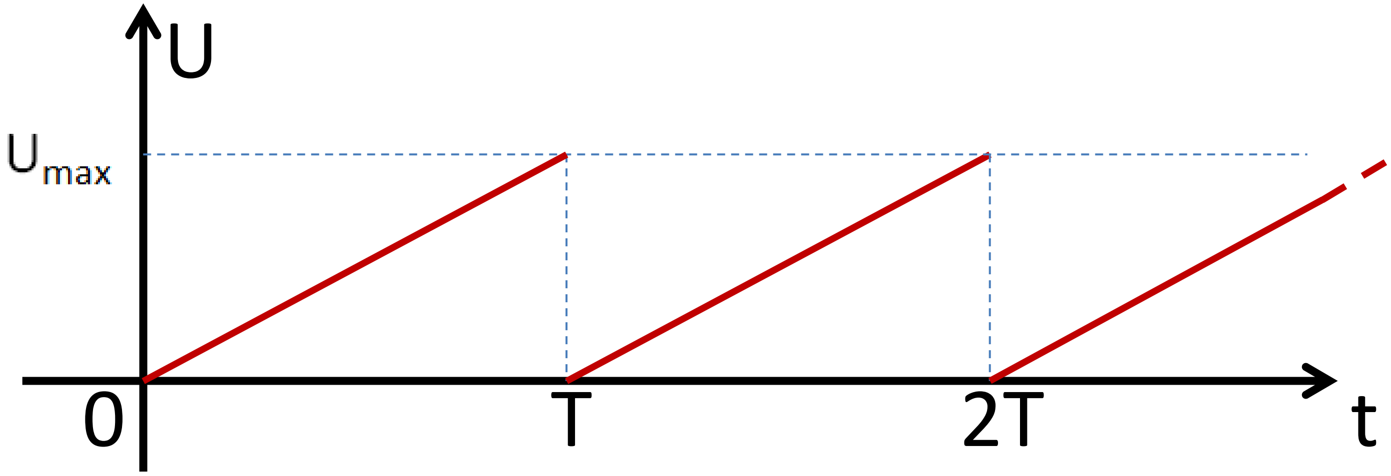
$$U_{eff}^{2} = \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} U^2 \, dt$$

Exo 12 : La tension U est définie et périodique sur [0 ; 10T].



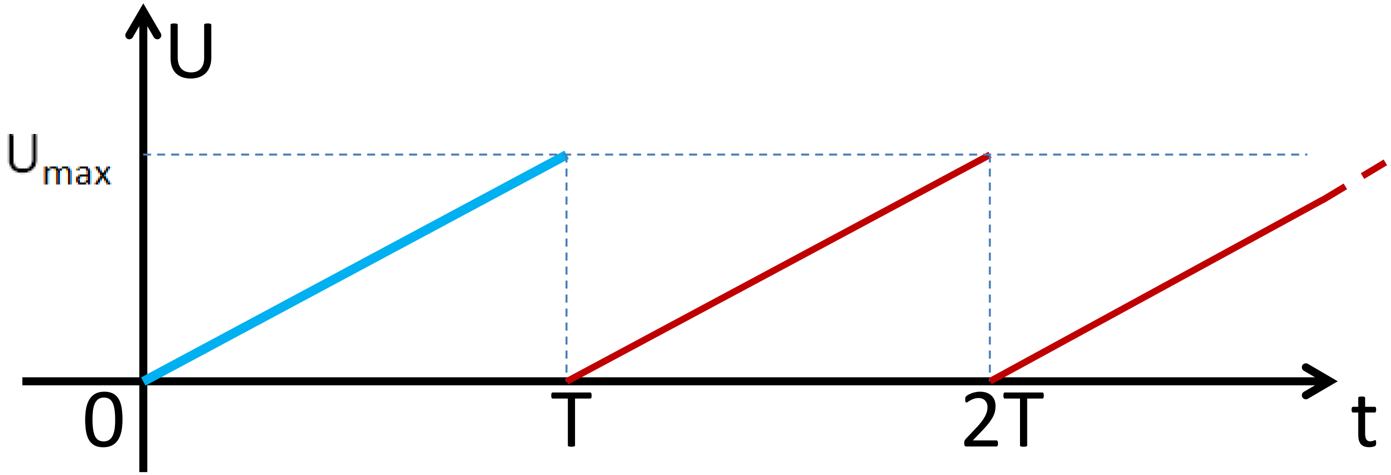
Déterminez sa valeur moyenne

1°)



U_{moy} = ...

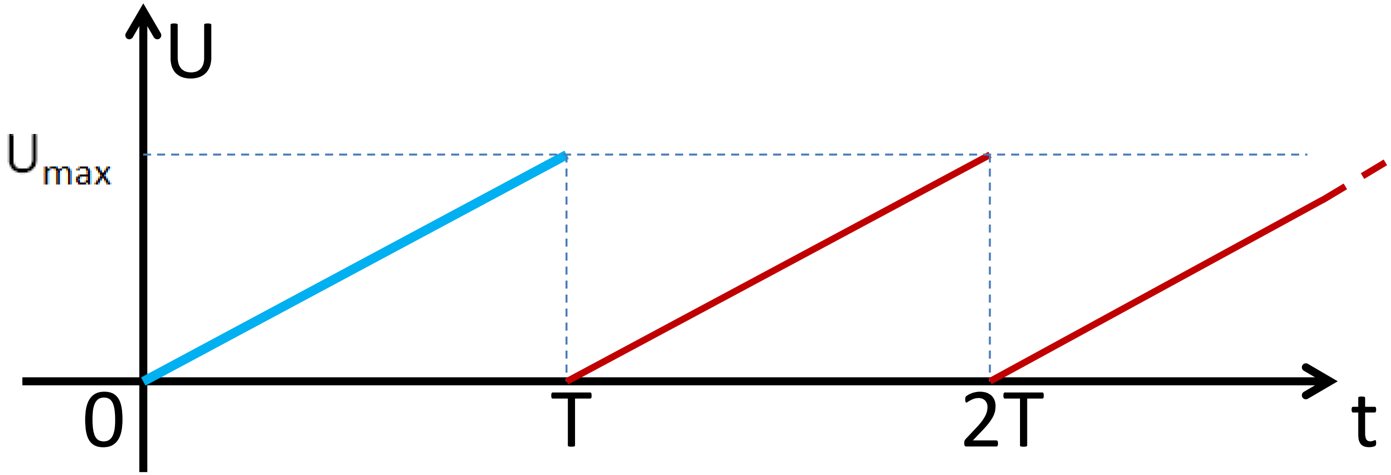
1°)



D'après l'exo 11 $\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \mu_{[\,0\,;\,1T\,]}$

$$U_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T U\,dt$$

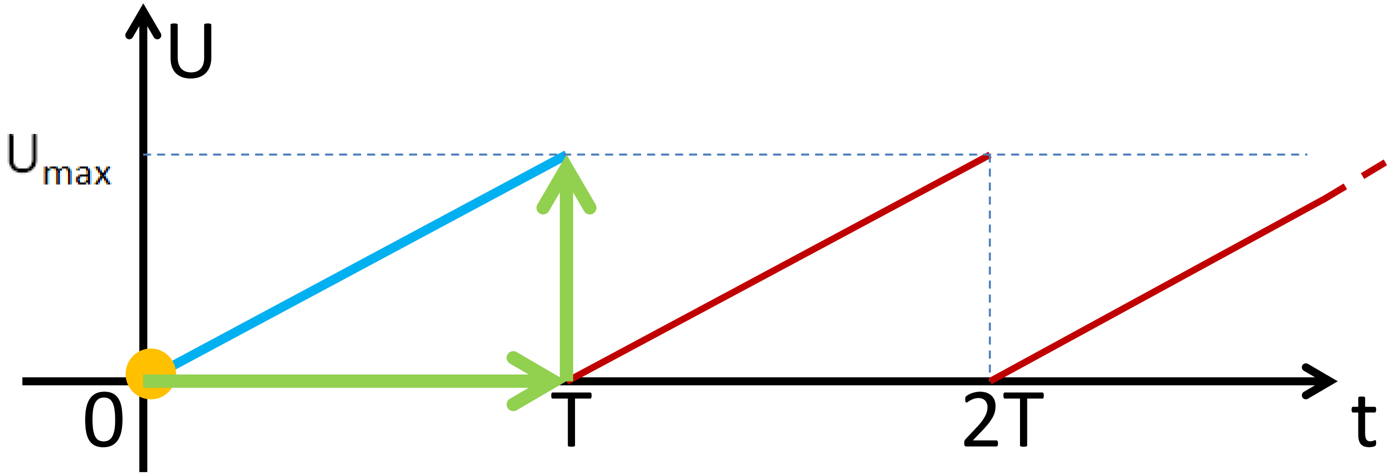
1°)



D'après l'exo 11 $\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \mu_{[\,0\,;\,1T\,]}$

$$U_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T U\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \ldots \quad dt$$

1°)



D’après l’exo 11 $\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \mu_{[\,0\,;\,1T\,]}$

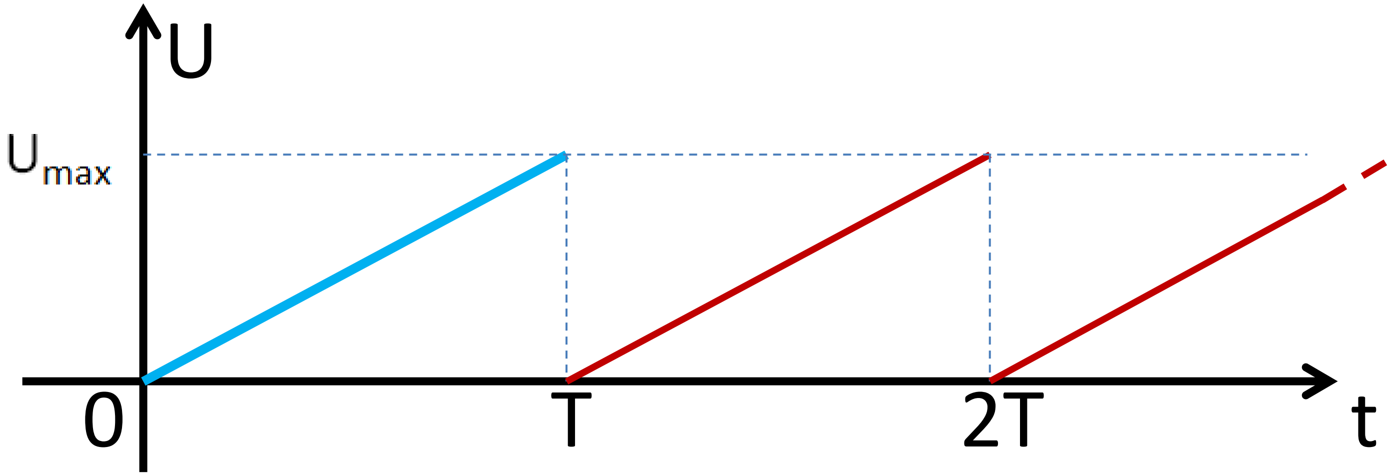
$$U_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T U\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_{max}}{T}\,t\,dt$$

segment ⇒ U(t) est affine ⇒ $U(t) = mt + p$

p = ordonnée à l’origine = 0

m = coeff. directeur = $\Delta y / \Delta x = U_{max} / T$

1°)

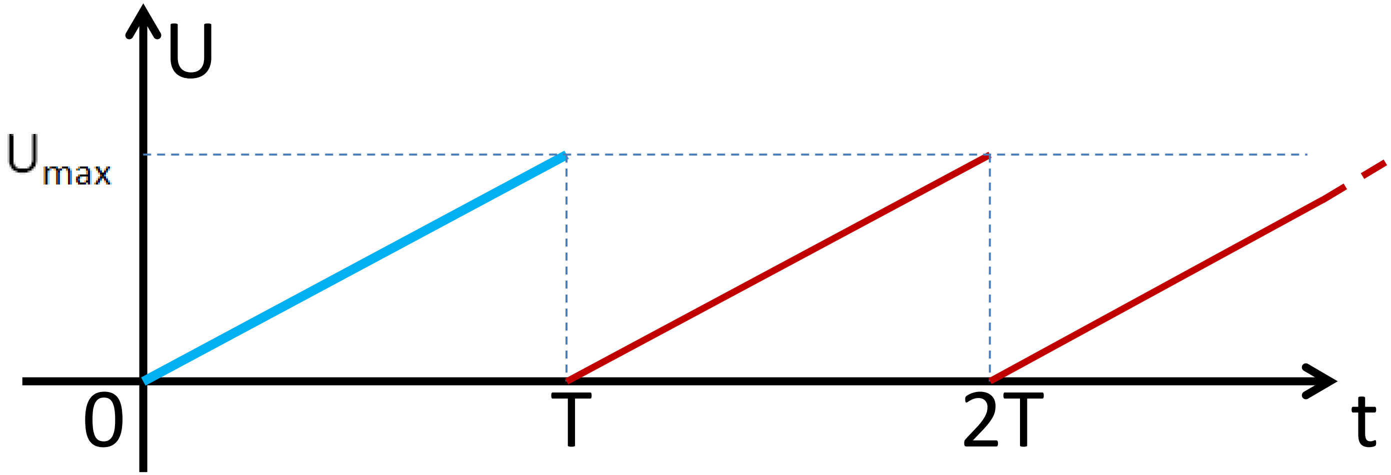


D'après l'exo 11 $\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \mu_{[\,0\,;\,1T\,]}$

$$U_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T U\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_{max}}{T}\,t\,dt$$

$$= \ldots$$

1°)

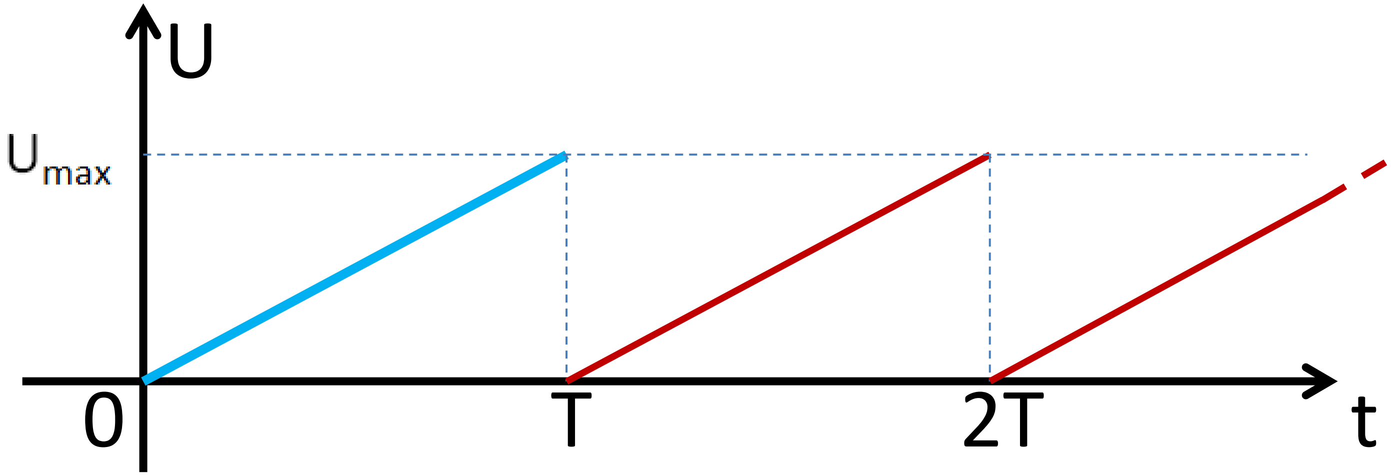


D'après l'exo 11 $\mu_{[0\,;\,nT]} = \mu_{[0\,;\,1T]}$

$$U_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T U\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_{max}}{T}\,t\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{U_{max}}{2T}\,t^2\right)_0^T = \ldots$$

1°)

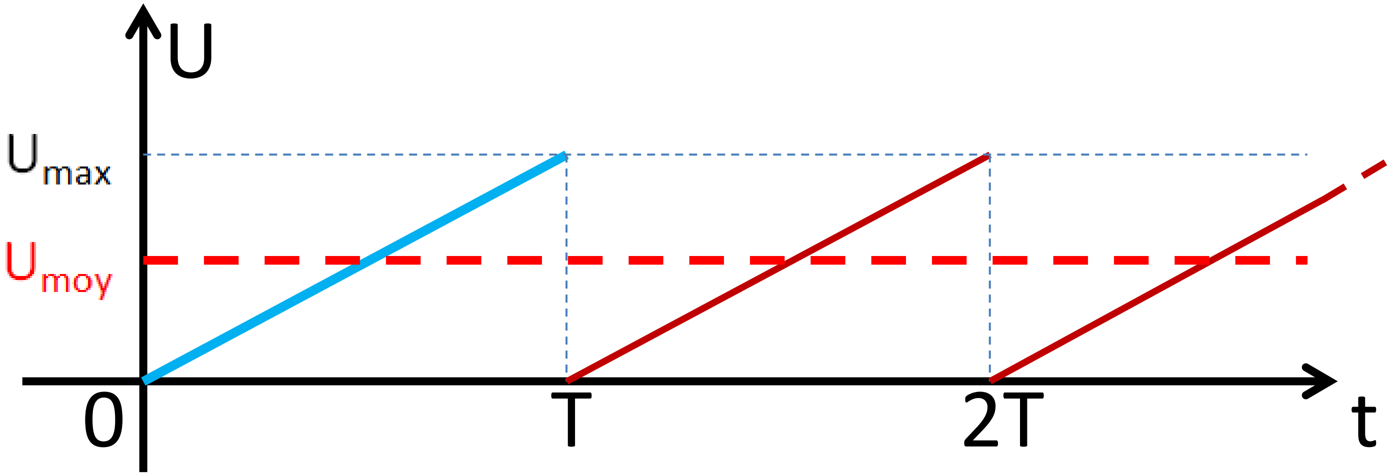


D'après l'exo 11 $\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \mu_{[\,0\,;\,1T\,]}$

$$U_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T U\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_{max}}{T}\,t\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{U_{max}}{2T}\,t^2\right)_0^T = \frac{1}{T}\left(\frac{U_{max}}{2T}\,T^2 - 0\right) = \ldots$$

1°)



D'après l'exo 11 $\mu_{[0\,;\,nT]} = \mu_{[0\,;\,1T]}$

$$U_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T U\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_{max}}{T}\,t\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{U_{max}}{2T}\,t^2\right]_0^T = \frac{1}{T}\left(\frac{U_{max}}{2T}\,T^2 - 0\right) = \frac{U_{max}}{2}$$

2°)

$$U_{eff}^{2} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} U^{2}\,dt$$

2°)

$$U_{eff}^{2} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} U^{2}\,dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T}\left(\ \ldots\qquad\qquad\ \right)^{2} dt$$

2°)

$$U_{eff}^{2} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} U^{2}\,dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T}\left(\frac{U_{max}}{T}\,t\right)^{2} dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \ldots \qquad dt$$

2°)

$$U_{eff}^{2} = \frac{1}{T}\int_0^T U^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{U_{max}}{T}\,t\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_{max}^{2}}{T^2}\,t^2\,dt = \ldots$$

2°)

$$U_{eff}^{2} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} U^{2}\,dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T}\left(\frac{U_{max}}{T}\,t\right)^{2} dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{0}^{T}\frac{U_{max}^{2}}{T^{2}}\,t^{2}\,dt = \frac{1}{T}\left[\frac{U_{max}^{2}}{3T^{2}}\,t^{3}\right]_{0}^{T}$$

$$U_{eff}^{2} = \frac{1}{T}\left(\ldots - \ldots\right)$$

2°)

$$U_{eff}^{\ 2} = \frac{1}{T}\int_0^T U^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{U_{max}}{T}\,t\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_{max}^{\ 2}}{T^2}\,t^2\,dt = \frac{1}{T}\left(\frac{U_{max}^{\ 2}}{3T^2}\,t^3\right)_0^T$$

$$U_{eff}^{\ 2} = \frac{1}{T}\left(\frac{U_{max}^{\ 2}}{3T^2}\,T^3 - 0\right) = \ldots$$

2°)

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T U^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{U_{max}}{T}\,t\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_{max}^2}{T^2}\,t^2\,dt = \frac{1}{T}\left(\frac{U_{max}^2}{3T^2}\,t^3\right)_0^T$$

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T}\left(\frac{U_{max}^2}{3T^2}\,T^3 - 0\right) = \frac{U_{max}^2}{3}$$

2°)

$$U_{eff}^{2} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} U^{2}\,dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T}\left(\frac{U_{max}}{T}\,t\right)^{2} dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{0}^{T}\frac{U_{max}^{2}}{T^{2}}\,t^{2}\,dt = \frac{1}{T}\left[\frac{U_{max}^{2}}{3T^{2}}\,t^{3}\right]_{0}^{T}$$

$$U_{eff}^{2} = \frac{1}{T}\left(\frac{U_{max}^{2}}{3T^{2}}\,T^{3} - 0\right) = \frac{U_{max}^{2}}{3} \qquad \boxed{U_{eff} = \ldots}$$

2°)

$$U_{eff}^{2} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} U^{2}\,dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T}\left(\frac{U_{max}}{T}\,t\right)^{2} dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{0}^{T}\frac{U_{max}^{2}}{T^{2}}\,t^{2}\,dt = \frac{1}{T}\left(\frac{U_{max}^{2}}{3T^{2}}\,t^{3}\right)_{0}^{T}$$

$$U_{eff}^{2} = \frac{1}{T}\left(\frac{U_{max}^{2}}{3T^{2}}\,T^{3} - 0\right) = \frac{U_{max}^{2}}{3} \qquad \boxed{U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{3}}}$$

Exercice 13 :

$$i(t) = A + B \sin(\omega t + \phi)$$

est l'intensité dans un circuit électrique.

1°) Quelle est sa période T ?

2°) Déterminez sa valeur moyenne.

3°) Quelle est sa valeur efficace si A = 0 ?

Exercice 13 :

$i(t) = A + B \sin(\omega t + \phi)$

1°) La fonction sinus est périodique de période 2π

$\Longleftrightarrow$ …

Exercice 13 :

$i(t) = A + B \sin(\omega t + \phi)$

1°) La fonction sinus est périodique de période 2π

$\Longleftrightarrow$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout réel x

Exercice 13 : $i(t) = A + B \sin(\omega t + \phi)$

1°) La fonction sinus est périodique de période 2π

$\Longleftrightarrow$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout réel x

Donc pour tout réel x = ...

$\sin(\ \ldots\qquad) = \sin(\ \ldots\qquad)$

Exercice 13 :

$i(t) = A + B \sin(\omega t + \phi)$

1°) La fonction sinus est périodique de période 2π

$\Longleftrightarrow$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout réel x

Donc pour tout réel $x = \omega t + \phi$

$$\sin(\omega t + \phi + 2\pi) = \sin(\omega t + \phi)$$

Exercice 13 :

$i(t) = A + B \sin(\omega t + \phi)$

1°) La fonction sinus est périodique de période 2π

$\Longleftrightarrow$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout réel x

Donc pour tout réel $x = \omega t + \phi$

$$\sin(\omega t + \phi + 2\pi) = \sin(\omega t + \phi)$$

$\Longleftrightarrow$ $\sin(\omega(\ldots \quad) + \phi) = \sin(\omega t + \phi)$

Exercice 13 :

$i(t) = A + B \sin(\omega t + \phi)$

1°) La fonction sinus est périodique de période 2π

$\Longleftrightarrow$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout réel x

Donc pour tout réel $x = \omega t + \phi$

$$\sin(\omega t + \phi + 2\pi) = \sin(\omega t + \phi)$$

$\Longleftrightarrow$ $\sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi) = \sin(\omega t + \phi)$

Exercice 13 :

$i(t) = A + B \sin(\omega t + \phi)$

1°) La fonction sinus est périodique de période 2π

$\Longleftrightarrow$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout réel x

Donc pour tout réel $x = \omega t + \phi$

$$\sin(\omega t + \phi + 2\pi) = \sin(\omega t + \phi)$$

$\Longleftrightarrow$ $\sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi) = \sin(\omega t + \phi)$

$\Longleftrightarrow$ $\ldots \sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi)$

$$= \ldots \sin(\omega t + \phi)$$

Exercice 13 :

$i(t) = A + B \sin(\omega t + \phi)$

1°) La fonction sinus est périodique de période 2π

$\Longleftrightarrow$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout réel x

Donc pour tout réel $x = \omega t + \phi$

$$\sin(\omega t + \phi + 2\pi) = \sin(\omega t + \phi)$$

$\Longleftrightarrow$ $\sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi) = \sin(\omega t + \phi)$

$\Longleftrightarrow$ $A + B \sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi)$

$$= A + B \sin(\omega t + \phi)$$

Exercice 13 :

$$i(t) = A + B \sin(\omega t + \phi)$$

1°) La fonction sinus est périodique de période 2π

$\Longleftrightarrow$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout réel x

Donc pour tout réel $x = \omega t + \phi$

$$\sin(\omega t + \phi + 2\pi) = \sin(\omega t + \phi)$$

$\Longleftrightarrow$ $\sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi) = \sin(\omega t + \phi)$

$\Longleftrightarrow$ $A + B \sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi)$

$$= A + B \sin(\omega t + \phi)$$

$\Longleftrightarrow$ … $(t + 2\pi/\omega) =$ … pour tout réel t

Exercice 13 :

$i(t) = A + B \sin(\omega t + \phi)$

1°) La fonction sinus est périodique de période 2π

$\Longleftrightarrow$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout réel x

Donc pour tout réel $x = \omega t + \phi$

$$\sin(\omega t + \phi + 2\pi) = \sin(\omega t + \phi)$$

$\Longleftrightarrow$ $\sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi) = \sin(\omega t + \phi)$

$\Longleftrightarrow$ $A + B \sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi)$

$$= A + B \sin(\omega t + \phi)$$

$\Longleftrightarrow$ $i(t + 2\pi/\omega) = i(t)$ pour tout réel t

$\Longleftrightarrow$ l'intensité i est périodique de période …

Exercice 13 :

$i(t) = A + B\sin(\omega t + \phi)$

1°) La fonction sinus est périodique de période 2π

$\Longleftrightarrow$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout réel x

Donc pour tout réel $x = \omega t + \phi$

$$\sin(\omega t + \phi + 2\pi) = \sin(\omega t + \phi)$$

$\Longleftrightarrow$ $\sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi) = \sin(\omega t + \phi)$

$\Longleftrightarrow$ $A + B\sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi)$

$$= A + B\sin(\omega t + \phi)$$

$\Longleftrightarrow$ $i(t + 2\pi/\omega) = i(t)$ pour tout réel t

$\Longleftrightarrow$ l'intensité i est périodique de période $\mathbf{2\pi/\omega}$

2°)

$$i_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b i \, dt = \ldots$$

2°)

$$i_{moy} = \frac{1}{T-0} \int_0^T i \, dt$$

d’après l’exo 11

$$\mu_{[\,0\,;\,nT\,]} = \mu_{[\,0\,;\,1T\,]}$$

2°)

$$i_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega}\left[A + B\sin(\omega t + \phi)\right]dt$$

d'après l'exo 11 $\mu_{[0\,;\,nT]} = \mu_{[0\,;\,1T]}$

d'après la question 1° période $T = 2\pi/\omega$

2°)

$$i_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega}\left[A + B\sin(\omega t + \phi)\right]dt$$

d'après l'exo 11 $\mu_{[0\,;\,nT]} = \mu_{[0\,;\,1T]}$

d'après la question 1° période $T = 2\pi/\omega$

$$i_{moy} = \frac{1}{2\pi/\omega}\left[\;F(2\pi/\omega) - F(0)\;\right]$$

$F(t)$ = primitive de $i(t)$ $\Rightarrow$ $F(t) = \ldots$?

2°)

$$i_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega}\left[A + B\sin(\omega t + \phi)\right]dt$$

$$= \frac{\ldots}{\ldots}\int_0^{2\pi/\omega}\left[A + B\sin(\omega t + \phi)\right]dt$$

2°)

$$i_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega}\left[A + B\sin(\omega t + \phi)\right] dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left[\ \dots\ \right]_0^{2\pi/\omega}$$

2°)

$$i_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega}\left[A + B\sin(\omega t + \phi)\right]dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left[At + \frac{-B}{\omega}\cos(\omega t + \phi)\right]_0^{2\pi/\omega}$$

car : $(\cos u)' = -\sin u \times u'$

avec $u' = (\omega t + \phi)' = \omega$

$$\left(\left(-B/\omega\right)\cos u\right)' = \left(-B/\omega\right)\left(-\sin u \times u'\right)$$

$$= B\sin u$$

2°)

$$i_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega} \left[A + B\sin(\omega t + \phi)\right] dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left[At + \frac{-B}{\omega}\cos(\omega t + \phi) \right]_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left[\ldots \right]$$

2°)

$$i_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega}\left[A + B\sin(\omega t + \phi)\right]dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left(At + \frac{-B}{\omega}\cos(\omega t + \phi)\right)_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left(A\frac{2\pi}{\omega} + \frac{-B}{\omega}\cos(2\pi + \phi) - 0 - \frac{-B}{\omega}\cos\phi\right)$$

2°)

$$i_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega} \left[A + B\sin(\omega t + \phi)\right] dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left(At + \frac{-B}{\omega}\cos(\omega t + \phi)\right)_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left(A\frac{2\pi}{\omega} + \frac{-B}{\omega}\cos(2\pi + \phi) - 0 - \frac{-B}{\omega}\cos\phi\right)$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left(A\frac{2\pi}{\omega} + \frac{-B}{\omega}\cos\ldots + \frac{B}{\omega}\cos\phi\right.$$

2°)

$$i_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega} \left[A + B\sin(\omega t + \phi)\right] dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left(At + \frac{-B}{\omega}\cos(\omega t + \phi)\right)_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left(A\frac{2\pi}{\omega} + \frac{-B}{\omega}\cos(2\pi + \phi) - 0 - \frac{-B}{\omega}\cos\phi\right)$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left(A\frac{2\pi}{\omega} + \frac{-B}{\omega}\cos\phi + \frac{B}{\omega}\cos\phi\right) = \ldots$$

2°)

$$i_{moy} = \frac{1}{T-0}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega}\left[A + B\sin(\omega t + \phi)\right]dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left(At + \frac{-B}{\omega}\cos(\omega t + \phi)\right)_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left(A\frac{2\pi}{\omega} + \frac{-B}{\omega}\cos(2\pi + \phi) - 0 - \frac{-B}{\omega}\cos\phi\right)$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\left(A\frac{2\pi}{\omega} + \frac{-B}{\omega}\cos\phi + \frac{B}{\omega}\cos\phi\right) = A$$

3°)

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T-0}\int_0^T i^2 dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega} \left[\ B \sin(\omega t + \phi)\right]^2 dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} B^2 \sin^2(\omega t + \phi)\, dt \quad 3°)$$

$$= \ \dots$$

impossible de trouver une primitive de $\sin^2 u$ car il manque $\times\, u'$

3°)

$$V_{eff}^{2} = \frac{1}{T-0}\int_{0}^{T} i^{2}dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_{0}^{2\pi/\omega} \left[B \sin(\omega t + \phi) \right]^{2} dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_{0}^{2\pi/\omega} B^{2} \sin^{2}(\omega t + \phi)\, dt \qquad 3°)$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_{0}^{2\pi/\omega} B^{2} \left[\ldots \qquad\qquad \right] dt$$

impossible de trouver une primitive de $\sin^2 u$ car il manque $\times\, u'$

➡ linéarisation : $\sin^2 u = 0{,}5 - 0{,}5 \cos 2u$

3°)

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T-0}\int_0^T i^2 dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega} \left[B\sin(\omega t + \phi) \right]^2 dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} B^2 \sin^2(\omega t + \phi)\, dt \qquad 3°)$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} B^2 \left[0,5 - 0,5\cos(2\omega t + 2\phi) \right] dt$$

impossible de trouver une primitive de $\sin^2 u$ car il manque $\times\, u'$

➡ linéarisation : $\sin^2 u = 0,5 - 0,5 \cos 2u$

3°)

$$V_{eff}^{2} = \frac{1}{T-0}\int_{0}^{T} i^{2}dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_{0}^{2\pi/\omega} \left[B\sin(\omega t+\phi)\right]^{2} dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_{0}^{2\pi/\omega} B^{2}\,(0{,}5 - 0{,}5\cos(2\omega t + 2\phi))\,dt$$

$$= \frac{\omega B^{2}}{2\pi}\left(0{,}5t - 0{,}5\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + 2\phi)\right)_{0}^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega B^{2}}{2\pi}\left(\ldots\right.$$

3°)

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T-0}\int_0^T i^2 dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega} \left[B \sin(\omega t + \phi) \right]^2 dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} B^2 \left(0{,}5 - 0{,}5 \cos(2\omega t + 2\phi) \right) dt$$

$$= \frac{\omega B^2}{2\pi}\left(0{,}5t - 0{,}5\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + 2\phi) \right)_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega B^2}{2\pi}\left(0{,}5\frac{2\pi}{\omega} - 0{,}5\frac{\sin(4\pi + 2\phi)}{2\omega} - 0 + 0{,}5\frac{\sin 2\phi}{2\omega} \right)$$

3°)

$$V_{eff}^{2} = \frac{1}{T-0}\int_{0}^{T} i^{2}dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_{0}^{2\pi/\omega} \left[B \sin(\omega t + \phi) \right]^{2} dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_{0}^{2\pi/\omega} B^{2} (0{,}5 - 0{,}5 \cos(2\omega t + 2\phi)) dt$$

$$= \frac{\omega B^{2}}{2\pi}\left(0{,}5t - 0{,}5\frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\phi) \right)_{0}^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega B^{2}}{2\pi}\left(0{,}5\frac{2\pi}{\omega} - 0{,}5\frac{\sin 2\phi}{2\omega} - 0 + 0{,}5\frac{\sin 2\phi}{2\omega} \right)$$

3°)

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T-0}\int_0^T i^2 dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega} \left[B \sin(\omega t + \phi) \right]^2 dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} B^2 \left(0{,}5 - 0{,}5 \cos(2\omega t + 2\phi) \right) dt$$

$$= \frac{\omega B^2}{2\pi}\left(0{,}5t - 0{,}5 \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\phi) \right)_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega B^2}{2\pi}\left(0{,}5 \frac{2\pi}{\omega} \right) = \ \ldots$$

3°)

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T-0}\int_0^T i^2 dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega} \left[B \sin(\omega t + \phi) \right]^2 dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} B^2 \left(0{,}5 - 0{,}5 \cos(2\omega t + 2\phi) \right) dt$$

$$= \frac{\omega B^2}{2\pi}\left(0{,}5t - 0{,}5\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + 2\phi) \right)_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega B^2}{2\pi}\left(0{,}5\frac{2\pi}{\omega} \right) = \frac{B^2}{2} \Rightarrow V_{eff} = \ldots$$

3°)

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T-0}\int_0^T i^2 dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega} \left[B \sin(\omega t + \phi) \right]^2 dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} B^2 \left(0{,}5 - 0{,}5 \cos(2\omega t + 2\phi)\right) dt$$

$$= \frac{\omega B^2}{2\pi}\left[0{,}5t - 0{,}5\frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\phi) \right]_0^{2\pi/\omega}$$

$$= \frac{\omega B^2}{2\pi}\left(0{,}5 \frac{2\pi}{\omega} \right) = \frac{B^2}{2} \Rightarrow \boxed{V_{eff} = \frac{B}{\sqrt{2}}}$$