III Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

$y' = y$ a pour solution $y = \ldots$

III Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

$y' = y$ a pour solution $y = e^x$ $y' = (e^x)' = e^x = y$

$y' = a\,y$ a pour solution $y = \dots$

III Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

$y' = y$ a pour solution $y = e^x$ $\quad y' = (e^x)' = e^x = y$

$y' = a\,y$ a pour solution $y = e^{ax}$ $\quad y' = (e^{ax})' = a\,e^{ax} = a\,y$

et aussi $y = \ldots$

III Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

$y' = y$ a pour solution $y = e^{x}$ $\qquad y' = (e^{x})' = e^{x} = y$

$y' = a\,y$ a pour solution $y = e^{ax}$ $\qquad y' = (e^{ax})' = a\,e^{ax} = a\,y$

et aussi $y = k\,e^{ax}$

$y' = (k\,e^{ax})'$

III Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

$y' = y$ a pour solution $y = e^x$ $\quad y' = (e^x)' = e^x = y$

$y' = a\,y$ a pour solution $y = e^{ax}$ $\quad y' = (e^{ax})' = a\,e^{ax} = a\,y$

et aussi $y = k\,e^{ax}$

$y' = (k\,e^{ax})' = k\,(e^{ax})'$

III Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

$y' = y$ a pour solution $y = e^x$ $\quad y' = (e^x)' = e^x = y$

$y' = a\,y$ a pour solution $y = e^{ax}$ $\quad y' = (e^{ax})' = a\,e^{ax} = a\,y$

et aussi $y = k\,e^{ax}$

$$y' = (k\,e^{ax})' = k\,(e^{ax})' = k\,(a\,e^{ax})$$

III Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

$y' = y$ a pour solution $y = e^x$ $\qquad y' = (e^x)' = e^x = y$

$y' = a\,y$ a pour solution $y = e^{ax}$ $\qquad y' = (e^{ax})' = a\,e^{ax} = a\,y$

et aussi $y = k\,e^{ax}$

$$y' = (k\,e^{ax})' = k\,(e^{ax})' = k\,(a\,e^{ax}) = a\,(k\,e^{ax})$$

III Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

$y' = y$ a pour solution $y = e^x$ $\qquad y' = (e^x)' = e^x = y$

$y' = a\,y$ a pour solution $y = e^{ax}$ $\qquad y' = (e^{ax})' = a\,e^{ax} = a\,y$

et aussi $y = k\,e^{ax}$

$$y' = (k\,e^{ax})' = k\,(e^{ax})' = k\,(a\,e^{ax}) = a\,(k\,e^{ax}) = a\,y$$

$\boxed{y' = a\,y \quad \text{a pour solution} \quad y = k\,e^{ax}}$

$(E_1) : y' = a\, y$ a pour solution $y = k\, e^{ax}$

Quelles sont les solutions de $(E_2) : y' = a\, y + b$?

Supposons qu'il existe une solution $y = k\, e^{ax} + C$

$y' = \ldots$

$$\boxed{(E_1) : y' = a\,y \qquad \text{a pour solution} \qquad y = k\,e^{ax}}$$

Quelles sont les solutions de $\boxed{(E_2) : y' = a\,y + b}$?

Supposons qu'il existe une solution $y = k\,e^{ax} + C$

$y' = (\,k\,e^{ax} + C\,)' = k\,(\,e^{ax}\,)' + (\,C\,)' = \ldots$

$\boxed{(E_1) : y' = a\,y \quad \text{a pour solution} \quad y = k\,e^{ax}}$

Quelles sont les solutions de $\boxed{(E_2) : y' = a\,y + b}$?

Supposons qu'il existe une solution $y = k\,e^{ax} + C$

$y' = (\,k\,e^{ax} + C\,)' = k\,(\,e^{ax}\,)' + (\,C\,)' = k\,(\,a\,e^{ax}\,) + (\,0\,) = ka\,e^{ax}$

Il faut que $y' = a\,y + b$ $\Rightarrow$ ...

$(E_1) : y' = a\,y$ a pour solution $y = k\,e^{ax}$

Quelles sont les solutions de $(E_2) : y' = a\,y + b$?

Supposons qu'il existe une solution $y = k\,e^{ax} + C$

$y' = (\,k\,e^{ax} + C\,)' = k\,(\,e^{ax}\,)' + (\,C\,)' = k\,(\,a\,e^{ax}\,) + (\,0\,) = ka\,e^{ax}$

Il faut que $y' = a\,y + b \Rightarrow ka\,e^{ax} = a\,(\,k\,e^{ax} + C\,) + b$

$\Rightarrow$ …

$$\boxed{(E_1) : y' = a\, y \qquad \text{a pour solution} \qquad y = k\, e^{ax}}$$

Quelles sont les solutions de $\boxed{(E_2) : y' = a\, y + b}$?

Supposons qu'il existe une solution $y = k\, e^{ax} + C$

$y' = (\, k\, e^{ax} + C\,)' = k\, (\, e^{ax}\,)' + (\, C\,)' = k\, (\, a\, e^{ax}\,) + (\, 0\,) = ka\, e^{ax}$

Il faut que $y' = a\, y + b \Rightarrow ka\, e^{ax} = a\, (\, k\, e^{ax} + C\,) + b$

$\Rightarrow ka\, e^{ax} = ka\, e^{ax} + aC + b \Rightarrow C = \ldots$

$$\boxed{(E_1) : y' = a\, y \quad \text{a pour solution} \quad y = k\, e^{ax}}$$

Quelles sont les solutions de $\boxed{(E_2) : y' = a\, y + b}$?

Supposons qu'il existe une solution $y = k\, e^{ax} + C$

$$y' = (\, k\, e^{ax} + C\,)' = k\,(\, e^{ax}\,)' + (\, C\,)' = k\,(\, a\, e^{ax}\,) + (\, 0\,) = ka\, e^{ax}$$

Il faut que $y' = a\, y + b \Rightarrow ka\, e^{ax} = a\,(\, k\, e^{ax} + C\,) + b$

$$\Rightarrow ka\, e^{ax} = ka\, e^{ax} + aC + b \Rightarrow 0 = aC + b \Rightarrow C = -\frac{b}{a}$$

$$\boxed{(E_2) : y' = a\, y + b \quad \text{a pour solution} \quad y = \ldots}$$

$$\boxed{(E_1) : y' = a\,y \qquad \text{a pour solution} \qquad y = k\,e^{ax}}$$

Quelles sont les solutions de $\boxed{(E_2) : y' = a\,y + b}$?

Supposons qu'il existe une solution $y = k\,e^{ax} + C$

$$y' = (\,k\,e^{ax} + C\,)' = k\,(\,e^{ax}\,)' + (\,C\,)' = k\,(\,a\,e^{ax}\,) + (\,0\,) = ka\,e^{ax}$$

Il faut que $y' = a\,y + b \Rightarrow ka\,e^{ax} = a\,(\,k\,e^{ax} + C\,) + b$

$$\Rightarrow ka\,e^{ax} = ka\,e^{ax} + aC + b \Rightarrow 0 = aC + b \Rightarrow C = -\,\frac{b}{a}$$

$$\boxed{(E_2) : y' = a\,y + b \qquad \text{a pour solution} \qquad y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}}$$

$$\boxed{(E_1) : y' = a\,y \qquad \text{a pour solution} \qquad y = k\,e^{ax}}$$

Toujours vrai ?

$$\boxed{(E_2) : y' = a\,y + b \qquad \text{a pour solution} \qquad y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}}$$

Toujours vrai ?

$\boxed{(E_1) : y' = a\,y \quad \text{a pour solution} \quad y = k\,e^{ax}}$

Toujours vrai ?

$\boxed{(E_2) : y' = a\,y + b \quad \text{a pour solution} \quad y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}}$ si a $\neq 0$

si a $= 0$: $y' = a\,y + b$ a pour solution ...

$$(E_1) : y' = a\,y \quad \text{a pour solution} \quad y = k\,e^{ax}$$

Toujours vrai ?

$$(E_2) : y' = a\,y + b \quad \text{a pour solution} \quad y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$$ si $a \neq 0$

si $a = 0$: $y' = a\,y + b$ a pour solution …

$$y' = 0\,y + b = b \Rightarrow y = bx + C$$

$\boxed{(E_1) : y' = a\,y \quad \text{a pour solution} \quad y = k\,e^{ax}}$

si $a = 0$: $y' = a\,y$ a pour solution ...

$\boxed{(E_2) : y' = a\,y + b \quad \text{a pour solution} \quad y = k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}}$ si $a \neq 0$

si $a = 0$: $y' = a\,y + b$ a pour solution ...

$y' = 0\,y + b = b \Rightarrow y = bx + C$

$$\boxed{(E_1) : y' = a\,y \quad \text{a pour solution} \quad y = k\,e^{ax}}$$

si $a = 0$: $y' = a\,y$ a pour solution …

$y' = 0\,y = 0 \Rightarrow y = k$

$$\boxed{(E_2) : y' = a\,y + b \quad \text{a pour solution} \quad y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}}$$ si $a \neq 0$

si $a = 0$: $y' = a\,y + b$ a pour solution …

$y' = 0\,y + b = b \Rightarrow y = bx + C$

$(E_1) : y' = a\,y$ a pour solution $y = k\,e^{ax}$ toujours vrai

si $a = 0$: $y' = a\,y$ a pour solution ...

$y' = 0\,y = 0 \Rightarrow y = k\,e^{0x} = k$

$(E_2) : y' = a\,y + b$ a pour solution $y = k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ si $a \neq 0$

si $a = 0$: $y' = a\,y + b$ a pour solution ...

$y' = 0\,y + b = b \Rightarrow y = bx + C$

a et b étant fixés, la solution $y = k\, e^{ax} - \frac{b}{a}$

de $y' = a\, y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est …

a et b étant fixés, la solution $y = k\, e^{ax} - \dfrac{b}{a}$

de $y' = a\, y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ...

a et b étant fixés, la solution $y = k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$

de $y' = a\,y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

$(E_1) : y' = a\,y$ a pour solution $y = k\,e^{ax}$ toujours vrai

$(E_2) : y' = a\,y + b$ a pour solution $y = k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ si $a \neq 0$

$$\boxed{(E_2) : y' = a\,y + b \qquad \text{a pour solution} \qquad y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}} \quad \text{si } a \neq 0$$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \dfrac{b}{a}}$

de $y' = a\, y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -\,2\, y + 6$

vérifiant $f(-\,0{,}5) = 1$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$

de $y' = a\,y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -\,2\,y + 6$

vérifiant $f(-\,0{,}5) = 1$

$y' = -\,2\,y + 6 = a\,y + b$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$

de $y' = a\, y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -\,2\, y + 6$

vérifiant $f(-\,0{,}5) = 1$

$y' = -\,2\, y + 6 = a\, y + b$

$\Leftrightarrow \quad y = k\, e^{ax} - \frac{b}{a}$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$

de $y' = a\,y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -\,2\,y + 6$

vérifiant $f(-\,0{,}5) = 1$

$y' = -\,2\,y + 6 = a\,y + b$

$$\Leftrightarrow \quad y = k\, e^{ax} - \frac{b}{a} = k\, e^{-2x} - \frac{6}{-2}$$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$

de $y' = a\, y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -\,2\, y + 6$

vérifiant $f(-\,0{,}5) = 1$

$y' = -\,2\, y + 6 = a\, y + b$

$$\Leftrightarrow \quad y = k\, e^{ax} - \frac{b}{a} = k\, e^{-2x} - \frac{6}{-2} = \boxed{k\, e^{-2x} + 3}$$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \dfrac{b}{a}}$

de $y' = a\, y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -\,2\, y + 6$

vérifiant $f(-\,0{,}5) = 1$

$y' = -\,2\, y + 6 = a\, y + b$

$$\Leftrightarrow \quad y = k\, e^{ax} - \frac{b}{a} = k\, e^{-2x} - \frac{6}{-2} = \boxed{k\, e^{-2x} + 3}$$

$f(-\,0{,}5) = 1$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$

de $y' = a\,y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -\,2\,y + 6$

vérifiant $f(-\,0{,}5) = 1$

$y' = -\,2\,y + 6 = a\,y + b$

$\Longleftrightarrow\quad y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a} = k\,e^{-2x} - \frac{6}{-2} = \boxed{k\,e^{-2x} + 3}$

$f(-\,0{,}5) = 1 \Longleftrightarrow k\,e^{-2(-0{,}5)} + 3 = 1$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$

de $y' = a\, y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -\, 2\, y + 6$

vérifiant $f(-\, 0{,}5) = 1$

$y' = -\, 2\, y + 6 = a\, y + b$

$\Leftrightarrow\quad y = k\, e^{ax} - \frac{b}{a} = k\, e^{-2x} - \frac{6}{-2} = \boxed{k\, e^{-2x} + 3}$

$f(-\, 0{,}5) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad k\, e^{-2(-0{,}5)} + 3 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad k\, e^{1} + 3 = 1$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$

de $y' = a\, y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -\, 2\, y + 6$

vérifiant $f(-\, 0{,}5) = 1$

$y' = -\, 2\, y + 6 = a\, y + b$

$\Longleftrightarrow \quad y = k\, e^{ax} - \frac{b}{a} = k\, e^{-2x} - \frac{6}{-2} = \boxed{k\, e^{-2x} + 3}$

$f(-\, 0{,}5) = 1 \Longleftrightarrow k\, e^{-2(-0{,}5)} + 3 = 1 \Longleftrightarrow k\, e^{1} + 3 = 1 \Longleftrightarrow k\, e^{1} = -2$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$

de $y' = a\,y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -\,2\,y + 6$

vérifiant $f(-\,0,5) = 1$

$y' = -\,2\,y + 6 = a\,y + b$

$\Leftrightarrow\ y = k\, e^{ax} - \frac{b}{a} = k\, e^{-2x} - \frac{6}{-2} = \boxed{k\, e^{-2x} + 3}$

$f(-\,0,5) = 1 \Leftrightarrow k\, e^{-2(-0,5)} + 3 = 1 \Leftrightarrow k\, e^{1} + 3 = 1 \Leftrightarrow k\, e^{1} = -2$

$\Leftrightarrow k = \frac{-\,2}{e}$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$

de $y' = a\, y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -2\, y + 6$

vérifiant $f(-0{,}5) = 1$

$y' = -2\, y + 6 = a\, y + b$

$\Leftrightarrow y = k\, e^{ax} - \frac{b}{a} = k\, e^{-2x} - \frac{6}{-2} = \boxed{k\, e^{-2x} + 3}$

$f(-0{,}5) = 1 \Leftrightarrow k\, e^{-2(-0{,}5)} + 3 = 1 \Leftrightarrow k\, e^{1} + 3 = 1 \Leftrightarrow k\, e^{1} = -2$

$\Leftrightarrow k = \frac{-2}{e}$

Réponse : $f(x) = k\, e^{-2x} + 3$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$

de $y' = a\,y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -2\,y + 6$

vérifiant $f(-0{,}5) = 1$

$y' = -2\,y + 6 = a\,y + b$

$\Leftrightarrow y = k\, e^{ax} - \frac{b}{a} = k\, e^{-2x} - \frac{6}{-2} = \boxed{k\, e^{-2x} + 3}$

$f(-0{,}5) = 1 \Leftrightarrow k\, e^{-2(-0{,}5)} + 3 = 1 \Leftrightarrow k\, e^{1} + 3 = 1 \Leftrightarrow k\, e^{1} = -2$

$\Leftrightarrow k = \frac{-2}{e}$

Réponse : $f(x) = k\, e^{-2x} + 3 = \boxed{\frac{-2}{e}\, e^{-2x} + 3}$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$

de $y' = a\, y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -\,2\, y + 6$

vérifiant $f(-\,0{,}5) = 1$

$y' = -\,2\, y + 6 = a\, y + b$

$\Longleftrightarrow\ y = k\, e^{ax} - \frac{b}{a} = k\, e^{-2x} - \frac{6}{-2} = \boxed{k\, e^{-2x} + 3}$

$f(-\,0{,}5) = 1 \Longleftrightarrow k\, e^{-2(-0{,}5)} + 3 = 1 \Longleftrightarrow k\, e^{1} + 3 = 1 \Longleftrightarrow k\, e^{1} = -2$

$\Longleftrightarrow k = \frac{-\,2}{e}$

Réponse : $f(x) = k\, e^{-2x} + 3 = \boxed{\frac{-\,2}{e}\, \mathbf{e^{-2x} + 3}} = -\,2e^{-1}\, \mathbf{e^{-2x} + 3}$

a et b étant fixés, la solution $y = \boxed{k\, e^{ax} - \frac{b}{a}}$

de $y' = a\,y + b$ vérifiant *une* condition $f(c) = d$

est unique car ne dépendant que de l'unique k

Exemple : Déterminez la solution de $y' = -\,2\,y + 6$

vérifiant $f(-\,0{,}5) = 1$

$y' = -\,2\,y + 6 = a\,y + b$

$\Longleftrightarrow\ y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a} = k\,e^{-2x} - \frac{6}{-2} = \boxed{k\,e^{-2x} + 3}$

$f(-\,0{,}5) = 1 \Longleftrightarrow k\,e^{-2(-0{,}5)} + 3 = 1 \Longleftrightarrow k\,e^{1} + 3 = 1 \Longleftrightarrow k\,e^{1} = -2$

$\Longleftrightarrow k = \frac{-\,2}{e}$

Réponse : $f(x) = k\,e^{-2x} + 3 = \boxed{\frac{-\,2}{e}\,\mathbf{e^{-2x} + 3}} = -\,2\,\mathbf{e^{-2x-1} + 3}$

Exercice 9 :

Résolvez les équations différentielles suivantes et déterminez les solutions f telles que $f(0) = 4$

1°) $y' = 3y$

2°) $y' = -2y$

3°) $y' = 5y + 6$

4°) $y' = 4y - 10$

5°) $y' = 4$

Exercice 9 :

Résolvez les équations différentielles suivantes et déterminez les solutions f telles que $f(0) = 4$

1°) $y' = 3y$

2°) $y' = -2y$

3°) $y' = 5y + 6$

4°) $y' = 4y - 10$

5°) $y' = 4$

$\boxed{(E_1) : y' = a\,y \quad \text{a pour solution} \quad y = k\,e^{ax}}$ toujours vrai

$\boxed{(E_2) : y' = a\,y + b \quad \text{a pour solution} \quad y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}}$ si $a \neq 0$

1°) $y' = 3y = ay \Rightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{3t}$

1°) $y' = 3y = ay \Rightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{3t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{3(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{3t}}$

2°) $y' = -\,2y$

1°) $y' = 3y = ay \Longrightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{3t}$

$f(0) = 4 \Longleftrightarrow k\,e^{3(0)} = 4 \Longleftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{3t}}$

2°) $y' = -\,2y = ay \Longrightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{-\,2t}$

1°) $y' = 3y = ay \Rightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{3t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{3(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{3t}}$

2°) $y' = -\,2y = ay \Rightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{-\,2t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{-\,2(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{-\,2t}}$

3°) $y' = 5y + 6$

1°) $y' = 3y = ay \Rightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{3t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{3(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$

Réponse : $f(x) = \boxed{4\,e^{3t}}$

2°) $y' = -2y = ay \Rightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{-2t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{-2(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$

Réponse : $f(x) = \boxed{4\,e^{-2t}}$

3°) $y' = 5y + 6 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{at} - \frac{b}{a} = k\,e^{5t} - \frac{6}{5} = k\,e^{5t} - 1,2$

1°) $y' = 3y = ay \Rightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{3t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{3(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{3t}}$

2°) $y' = -\,2y = ay \Rightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{-\,2t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{-\,2(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{-\,2t}}$

3°) $y' = 5y + 6 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a} = k\,e^{5t} - \dfrac{6}{5} = k\,e^{5t} - 1{,}2$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{5(0)} - 1{,}2 = 4 \Leftrightarrow k = 5{,}2$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{5{,}2\,e^{5t} - 1{,}2}$

$1°)\ y' = 3y = ay \Longrightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{3t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{3(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{3t}}$

$2°)\ y' = -\,2y = ay \Longrightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{-\,2t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{-\,2(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{-\,2t}}$

$3°)\ y' = 5y + 6 = ay + b \Longrightarrow y = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a} = k\,e^{5t} - \dfrac{6}{5} = k\,e^{5t} - 1{,}2$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{5(0)} - 1{,}2 = 4 \Leftrightarrow k = 5{,}2$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{5{,}2\,e^{5t} - 1{,}2}$

$4°)\ y' = 4y - 10$

1°) $y' = 3y = ay \Longrightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{3t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{3(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{3t}}$

2°) $y' = -\,2y = ay \Longrightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{-\,2t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{-\,2(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{-\,2t}}$

3°) $y' = 5y + 6 = ay + b \Longrightarrow y = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a} = k\,e^{5t} - \dfrac{6}{5} = k\,e^{5t} - 1{,}2$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{5(0)} - 1{,}2 = 4 \Leftrightarrow k = 5{,}2$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{5{,}2\,e^{5t} - 1{,}2}$

4°) $y' = 4y - 10 = ay + b \Longrightarrow y = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a} = k\,e^{4t} - (-\,10/4) = k\,e^{4t} + 2{,}5$

1°) $y' = 3y = ay \Longrightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{3t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{3(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{3t}}$

2°) $y' = -2y = ay \Longrightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{-2t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{-2(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{-2t}}$

3°) $y' = 5y + 6 = ay + b \Longrightarrow y = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a} = k\,e^{5t} - \dfrac{6}{5} = k\,e^{5t} - 1{,}2$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{5(0)} - 1{,}2 = 4 \Leftrightarrow k = 5{,}2$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{5{,}2\,e^{5t} - 1{,}2}$

4°) $y' = 4y - 10 = ay + b \Longrightarrow y = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a} = k\,e^{4t} - (-10/4) = k\,e^{4t} + 2{,}5$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{4(0)} + 2{,}5 = 4 \Leftrightarrow k = 1{,}5$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{1{,}5\,e^{4t} + 2{,}5}$

5°) $y' = 4$

1°) $y' = 3y = ay \Longrightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{3t}$

$f(0) = 4 \Longleftrightarrow k\,e^{3(0)} = 4 \Longleftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{3t}}$

2°) $y' = -\,2y = ay \Longrightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{-\,2t}$

$f(0) = 4 \Longleftrightarrow k\,e^{-\,2(0)} = 4 \Longleftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{-\,2t}}$

3°) $y' = 5y + 6 = ay + b \Longrightarrow y = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a} = k\,e^{5t} - \dfrac{6}{5} = k\,e^{5t} - 1{,}2$

$f(0) = 4 \Longleftrightarrow k\,e^{5(0)} - 1{,}2 = 4 \Longleftrightarrow k = 5{,}2$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{5{,}2\,e^{5t} - 1{,}2}$

4°) $y' = 4y - 10 = ay + b \Longrightarrow y = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a} = k\,e^{4t} - (-\,10/4) = k\,e^{4t} + 2{,}5$

$f(0) = 4 \Longleftrightarrow k\,e^{4(0)} + 2{,}5 = 4 \Longleftrightarrow k = 1{,}5$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{1{,}5\,e^{4t} + 2{,}5}$

5°) $y' = 4 \Longrightarrow y = 4x + C$

1°) $y' = 3y = ay \Longrightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{3t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{3(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{3t}}$

2°) $y' = -2y = ay \Longrightarrow y = k\,e^{at} = k\,e^{-2t}$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{-2(0)} = 4 \Leftrightarrow k = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4\,e^{-2t}}$

3°) $y' = 5y + 6 = ay + b \Longrightarrow y = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a} = k\,e^{5t} - \dfrac{6}{5} = k\,e^{5t} - 1{,}2$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{5(0)} - 1{,}2 = 4 \Leftrightarrow k = 5{,}2$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{5{,}2\,e^{5t} - 1{,}2}$

4°) $y' = 4y - 10 = ay + b \Longrightarrow y = k\,e^{at} - \dfrac{b}{a} = k\,e^{4t} - (-10/4) = k\,e^{4t} + 2{,}5$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow k\,e^{4(0)} + 2{,}5 = 4 \Leftrightarrow k = 1{,}5$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{1{,}5\,e^{4t} + 2{,}5}$

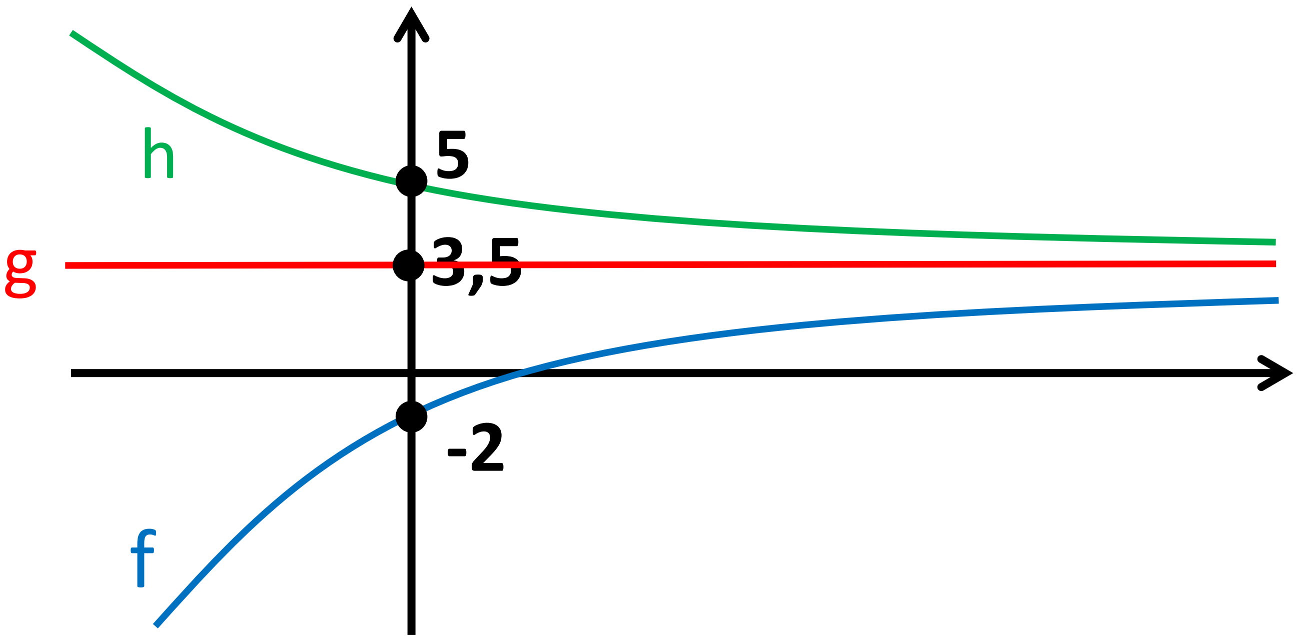
5°) $y' = 4 \Longrightarrow y = 4x + C$

$f(0) = 4 \Leftrightarrow 4\times 0 + C = 4 \Leftrightarrow C = 4$ *Réponse :* $f(x) = \boxed{4x + 4}$

Exercice 10 :

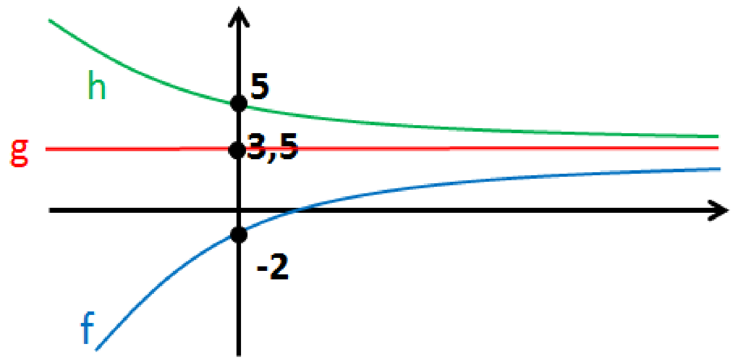
On donne les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h

solutions de l'équation différentielle $y' = -0,1y + 0,35$

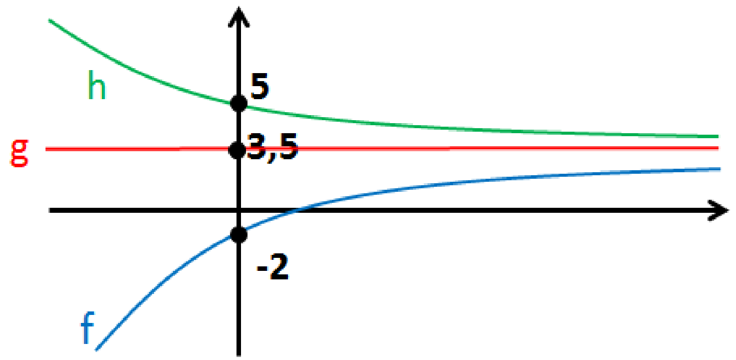


Déterminez les expressions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$

$$y' = -0,1y + 0,35$$

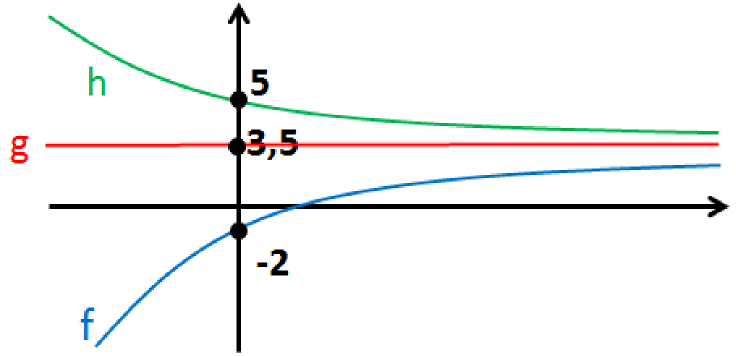


$$y' = -0{,}1y + 0{,}35 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{b}{a}$$



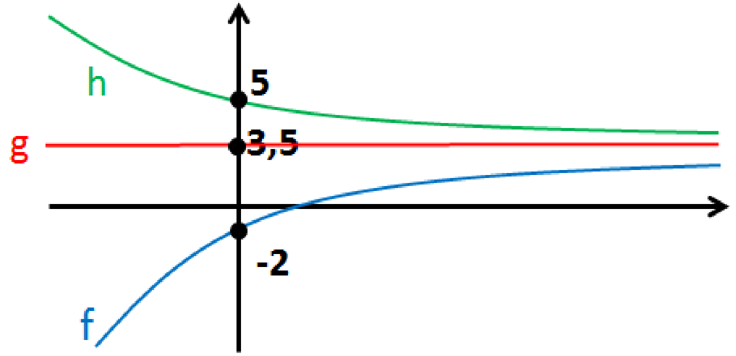
$$y' = -0{,}1y + 0{,}35 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{0{,}35}{-0{,}1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$



$$y' = -0{,}1y + 0{,}35 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{0{,}35}{-0{,}1}$$

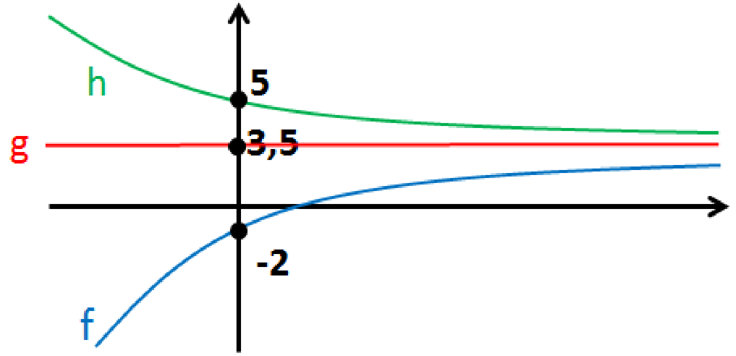
$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$



$$f(0) = k\,e^{a(0)} + 3{,}5 = -2$$

$$y' = -0{,}1y + 0{,}35 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{0{,}35}{-0{,}1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$

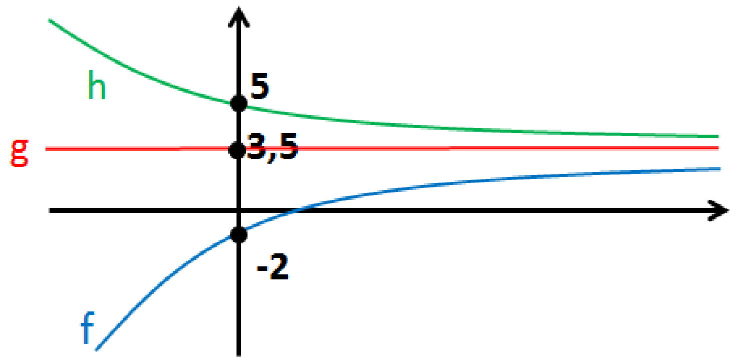


$$f(0) = k\,e^{a(0)} + 3{,}5 = -2 \Leftrightarrow k \times 1 + 3{,}5 = -2 \Leftrightarrow k = -5{,}5$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -5{,}5\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$

$$y' = -\,0{,}1y + 0{,}35 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{0{,}35}{-\,0{,}1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$



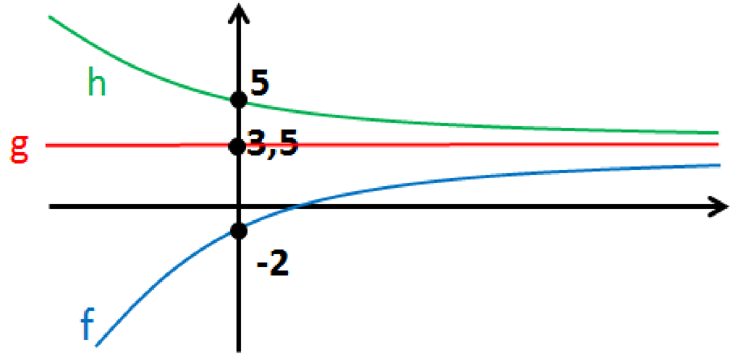
$$f(0) = k\,e^{a(0)} + 3{,}5 = -\,2 \Leftrightarrow k \times 1 + 3{,}5 = -\,2 \Leftrightarrow k = -\,5{,}5$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -\,5{,}5\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$

$$g(0) = k\,e^{a(0)} + 3{,}5 = 3{,}5$$

$$y' = -0{,}1y + 0{,}35 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{0{,}35}{-0{,}1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$



$$f(0) = k\,e^{a(0)} + 3{,}5 = -2 \Leftrightarrow k \times 1 + 3{,}5 = -2 \Leftrightarrow k = -5{,}5$$

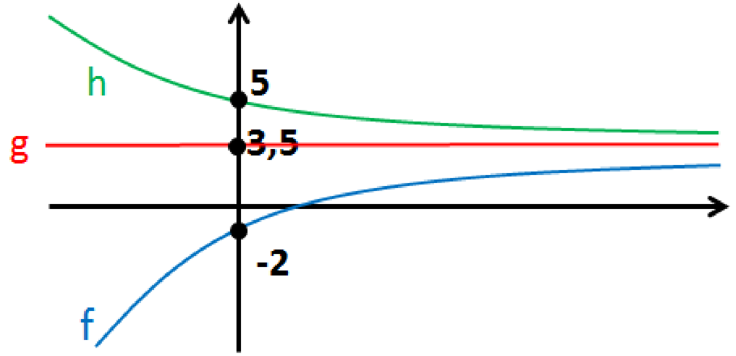
$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -5{,}5\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$

$$g(0) = k\,e^{a(0)} + 3{,}5 = 3{,}5 \Leftrightarrow k \times 1 + 3{,}5 = 3{,}5 \Leftrightarrow k = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = 0\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5 \Rightarrow \boxed{g(x) = 3{,}5}$$

$$y' = -0{,}1y + 0{,}35 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{0{,}35}{-0{,}1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$



$$f(0) = k\,e^{a(0)} + 3{,}5 = -2 \Leftrightarrow k \times 1 + 3{,}5 = -2 \Leftrightarrow k = -5{,}5$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -5{,}5\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$

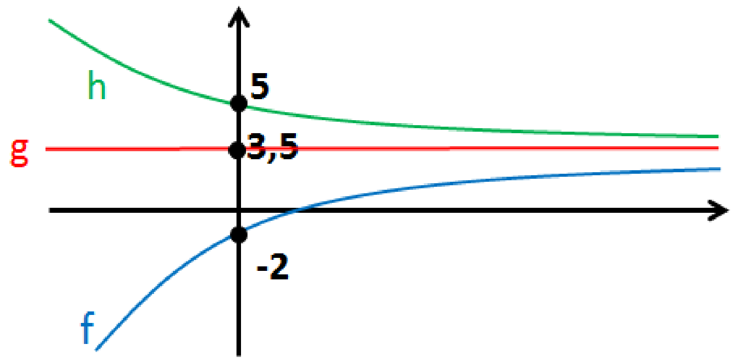
$$g(0) = k\,e^{a(0)} + 3{,}5 = 3{,}5 \Leftrightarrow k \times 1 + 3{,}5 = 3{,}5 \Leftrightarrow k = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = 0\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5 \Rightarrow \boxed{g(x) = 3{,}5}$$

$$h(0) = k\,e^{a(0)} + 3{,}5 = 5$$

$$y' = -0{,}1y + 0{,}35 = ay + b \Longrightarrow y = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}1t} - \frac{0{,}35}{-0{,}1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$



$$f(0) = k\,e^{a(0)} + 3{,}5 = -2 \Longleftrightarrow k \times 1 + 3{,}5 = -2 \Longleftrightarrow k = -5{,}5$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x) = -5{,}5\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$

$$g(0) = k\,e^{a(0)} + 3{,}5 = 3{,}5 \Longleftrightarrow k \times 1 + 3{,}5 = 3{,}5 \Longleftrightarrow k = 0$$

$$\Longrightarrow g(x) = 0\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5 \Longrightarrow \boxed{g(x) = 3{,}5}$$

$$h(0) = k\,e^{a(0)} + 3{,}5 = 5 \Longleftrightarrow k \times 1 + 3{,}5 = 5 \Longleftrightarrow k = 1{,}5$$

$$\Longrightarrow \boxed{h(x) = 1{,}5\,e^{-0{,}1t} + 3{,}5}$$

Exercice 11 :

Une batterie se recharge selon une fonction f

(en kWh, avec l'antécédent en heures)

solution de l'équation différentielle

$$y' = -0{,}55y + 12{,}1$$

Une batterie vide se recharge en 8h.

Le constructeur peut-il affirmer qu'en 4h la batterie est rechargée à 90% ?

Exo 11 :

$$y' = -\,0{,}55y + 12{,}1$$

Exo 11 :

$$y' = -\,0{,}55y + 12{,}1 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{b}{a}$$

Exo 11 :

$$y' = -0{,}55y + 12{,}1 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{12{,}1}{-0{,}55}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}55t} + 22}$$

Exo 11 :

$$y' = -0{,}55y + 12{,}1 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{12{,}1}{-0{,}55}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}55t} + 22}$$

charge initiale $\quad y(0) = k\,e^{a(0)} + 22 = 0$

Exo 11 :

$$y' = -0{,}55y + 12{,}1 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{12{,}1}{-0{,}55}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}55t} + 22}$$

charge initiale $\quad y(0) = k\,e^{a(0)} + 22 = 0$

$$\Leftrightarrow k \times 1 + 22 = 0 \Leftrightarrow k = -22 \Rightarrow \boxed{y = -22\,e^{-0{,}55t} + 22}$$

Exo 11 :

$$y' = -0{,}55y + 12{,}1 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{12{,}1}{-0{,}55}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}55t} + 22}$$

charge initiale $\quad y(0) = k\,e^{a(0)} + 22 = 0$

$$\Leftrightarrow k \times 1 + 22 = 0 \Leftrightarrow k = -22 \Rightarrow \boxed{y = -22\,e^{-0{,}55t} + 22}$$

charge totale $\quad C_{totale} = y(8)$

Exo 11 :

$$y' = -0{,}55y + 12{,}1 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{12{,}1}{-0{,}55}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}55t} + 22}$$

charge initiale $\quad y(0) = k\,e^{a(0)} + 22 = 0$

$$\Leftrightarrow k \times 1 + 22 = 0 \Leftrightarrow k = -22 \Rightarrow \boxed{y = -22\,e^{-0{,}55t} + 22}$$

charge totale $\quad C_{totale} = y(8) = -22\,e^{-0{,}55(8)} + 22 \approx \mathbf{21{,}73}$ kWh

Exo 11 :

$$y' = -0,55y + 12,1 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0,55t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0,55t} - \frac{12,1}{-0,55}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0,55t} + 22}$$

charge initiale $\quad y(0) = k\,e^{a(0)} + 22 = 0$

$$\Leftrightarrow k \times 1 + 22 = 0 \Leftrightarrow k = -22 \Rightarrow \boxed{y = -22\,e^{-0,55t} + 22}$$

charge totale $\quad C_{totale} = y(8) = -22\,e^{-0,55(8)} + 22 \approx$ **21,73** kWh

charge en 4h $\quad y(4)$

Exo 11 :

$$y' = -0{,}55y + 12{,}1 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{12{,}1}{-0{,}55}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}55t} + 22}$$

charge initiale $\quad y(0) = k\,e^{a(0)} + 22 = 0$

$$\Leftrightarrow k \times 1 + 22 = 0 \Leftrightarrow k = -22 \Rightarrow \boxed{y = -22\,e^{-0{,}55t} + 22}$$

charge totale $\quad C_{totale} = y(8) = -22\,e^{-0{,}55(8)} + 22 \approx \mathbf{21{,}73}$ kWh

charge en 4h $\quad y(4) = -22\,e^{-0{,}55(4)} + 22 \approx \mathbf{19{,}56}$ kWh

Exo 11 :

$$y' = -0{,}55y + 12{,}1 = ay + b \Rightarrow y = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0{,}55t} - \frac{12{,}1}{-0{,}55}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = k\,e^{-0{,}55t} + 22}$$

charge initiale $\quad y(0) = k\,e^{a(0)} + 22 = 0$

$$\Leftrightarrow k \times 1 + 22 = 0 \Leftrightarrow k = -22 \Rightarrow \boxed{y = -22\,e^{-0{,}55t} + 22}$$

charge totale $\quad C_{totale} = y(8) = -22\,e^{-0{,}55(8)} + 22 \approx \mathbf{21{,}73}$ kWh

charge en 4h $\quad y(4) = -22\,e^{-0{,}55(4)} + 22 \approx \mathbf{19{,}56}$ kWh

$$\frac{19{,}56}{21{,}73} \approx 90{,}02\%$$

Réponse : **Oui**, le constructeur dit vrai.

Exo 11 :

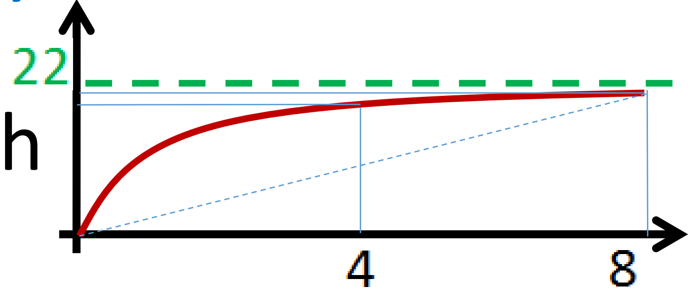
$$y' = -0,55y + 12,1 = ay + b \Longrightarrow y = k\,e^{-0,55t} - \frac{b}{a} = k\,e^{-0,55t} - \frac{12,1}{-0,55}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = k\,e^{-0,55t} + 22}$$

charge initiale $\quad y(0) = k\,e^{a(0)} + 22 = 0$

$$\Longleftrightarrow k \times 1 + 22 = 0 \Longleftrightarrow k = -22 \Longrightarrow \boxed{y = -22\,e^{-0,55t} + 22}$$

charge totale $\quad C_{totale} = y(8) = -22\,e^{-0,55(8)} + 22 \approx$ **21,73** kWh



charge en 4h $\quad y(4) = -22\,e^{-0,55(4)} + 22 \approx$ **19,56** kWh

$$\frac{19,56}{21,73} \approx 90,02\%$$

Réponse : **Oui**, le constructeur dit vrai.