

Exo 7 : Déterminez les racines d'une expression $f(x)$ avec un Algorithme de Dichotomie

du grec « **dicho** » (**en deux**)

et « **tomie** » (**couper**, comme dans vasectomie, appendicectomie, atome, anatomie...).

On cherche la solution approchée

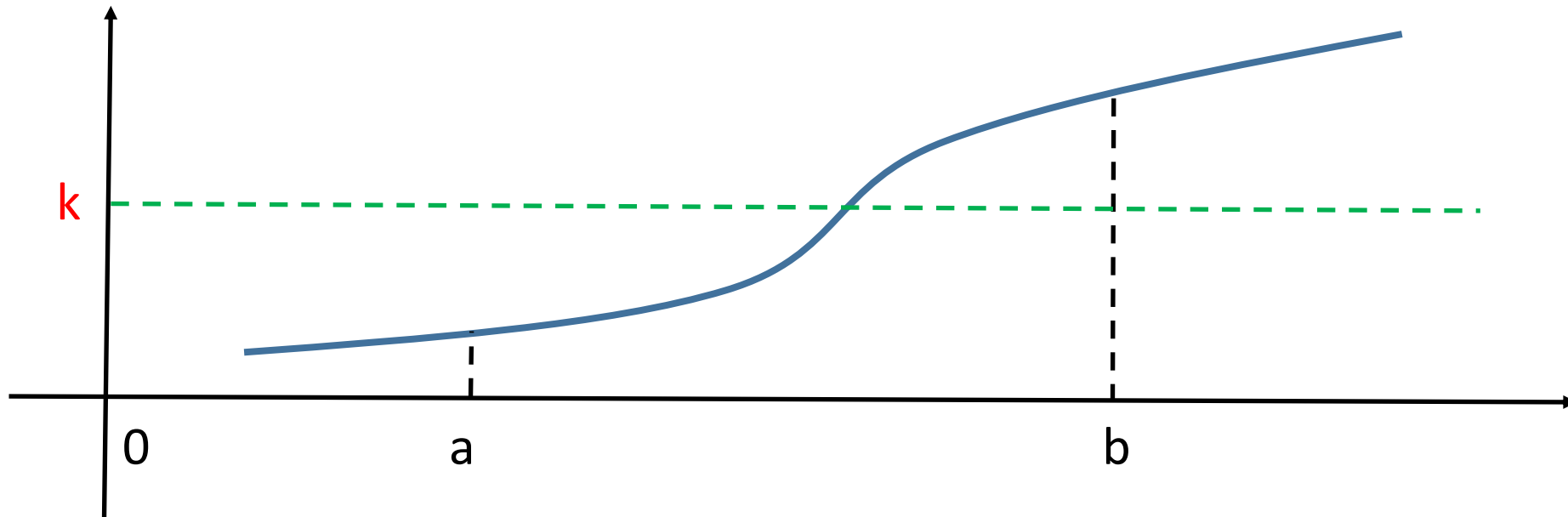
d'une équation du type $f(x) = k$

dans un intervalle $[a ; b]$ où f est monotone.

Algorithme de Dichotomie

du grec « **dicho** » (**en deux**) et « **tomie** » (**couper**, comme dans vasectomie, appendicectomie, atome, anatomie...).

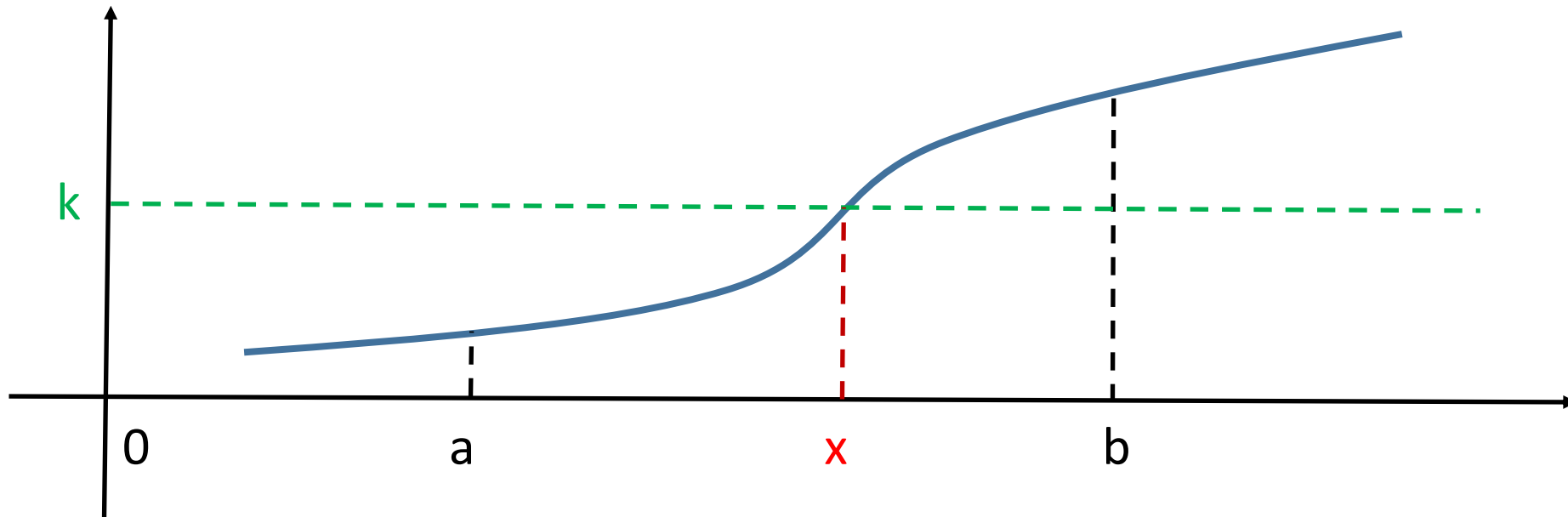
On cherche la solution approchée **x** dans un intervalle $[a ; b]$ d'une équation du type $f(x) = k$, où **f** est une fonction monotone (ayant un seul sens de variation) sur cet intervalle.



Algorithme de Dichotomie

du grec « **dicho** » (**en deux**) et « **tomie** » (**couper**, comme dans vasectomie, appendicectomie, atome, anatomie...).

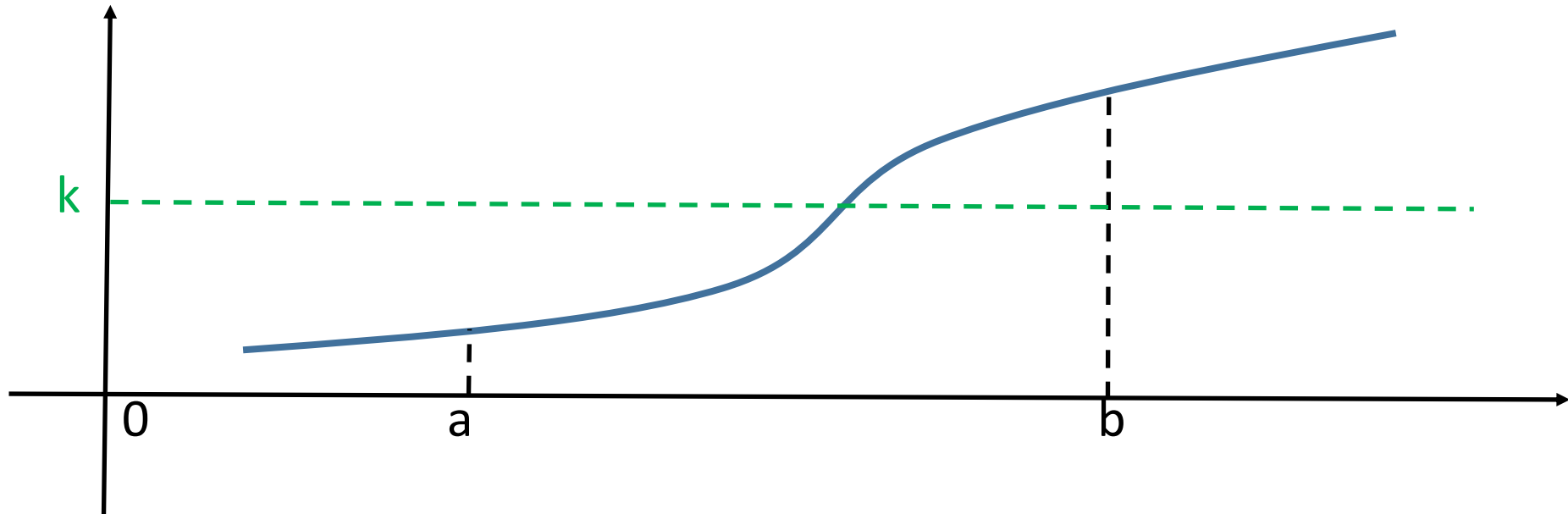
On cherche la solution approchée **x** dans un intervalle $[a ; b]$ d'une équation du type $f(x) = k$, où **f** est une fonction monotone (ayant un seul sens de variation) sur cet intervalle.



Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

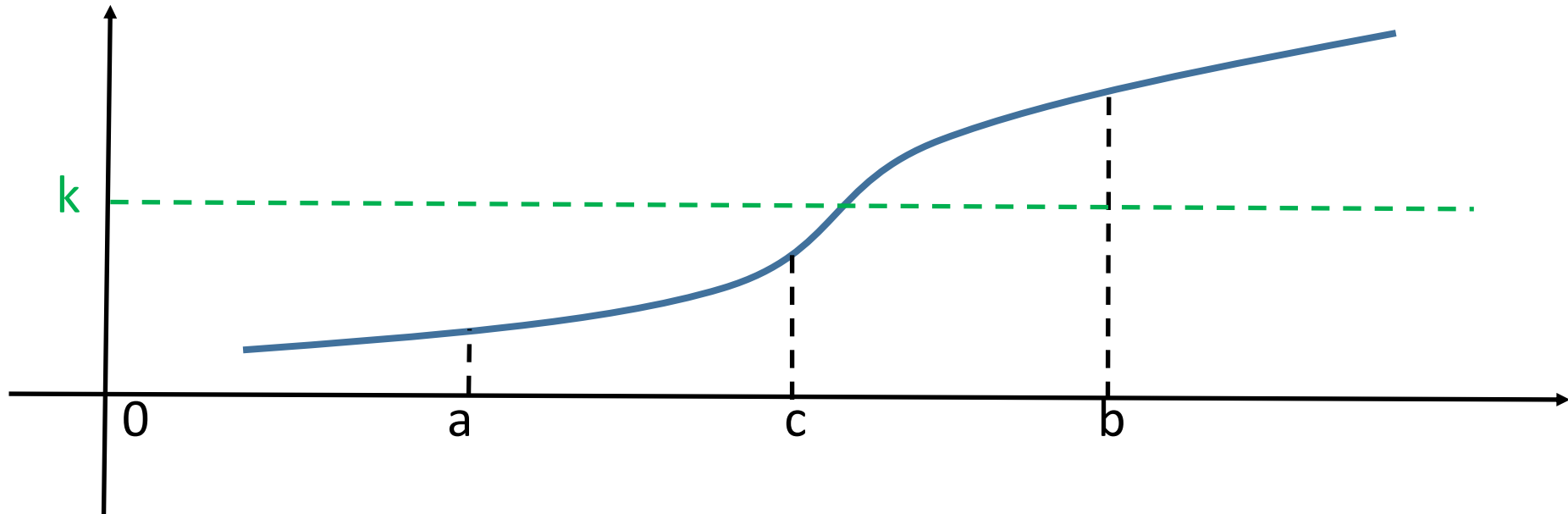
$c = \dots$



Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

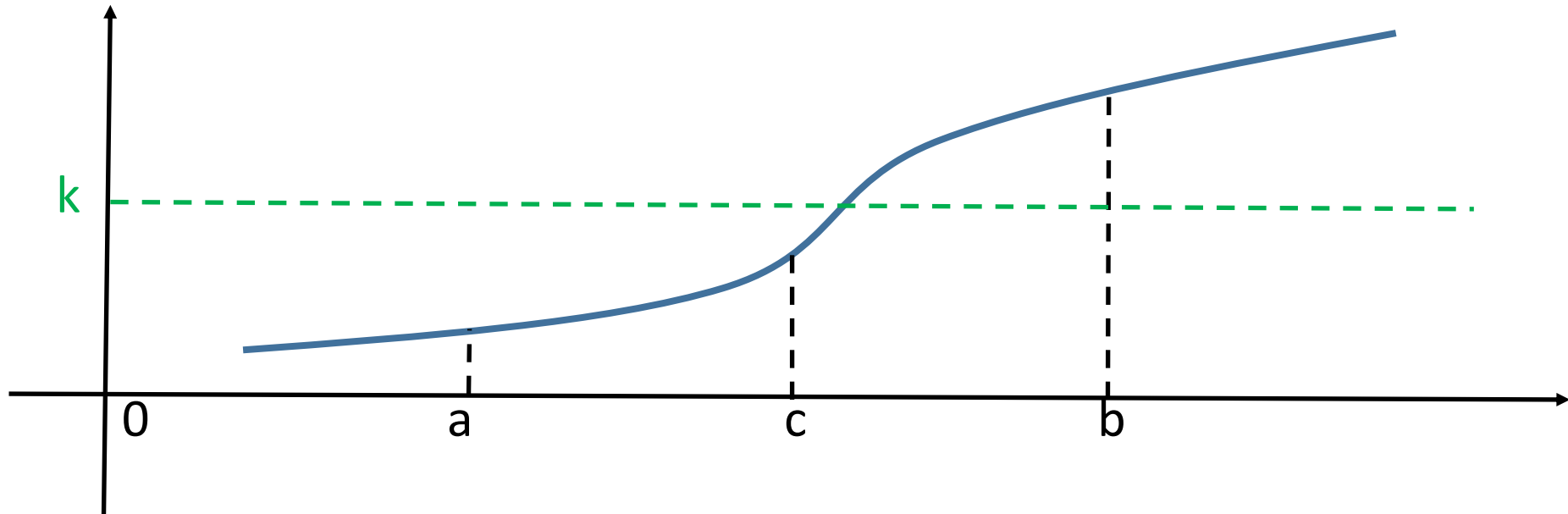
$$c = (a + b) / 2$$



Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

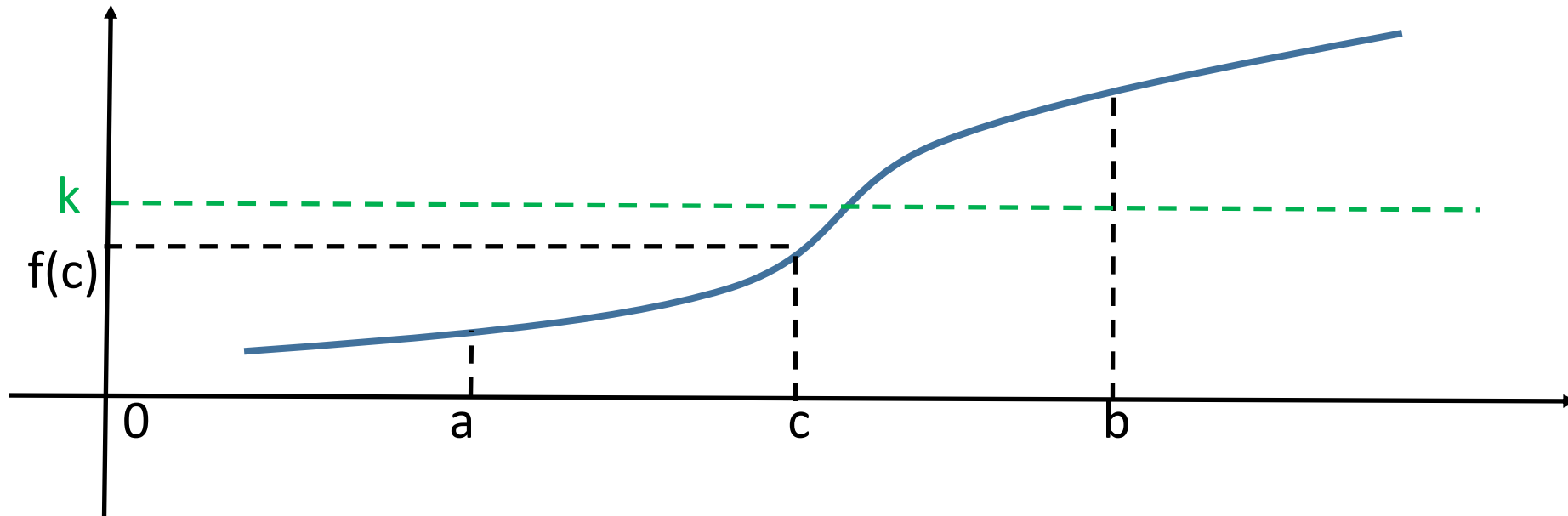
$c = (a + b) / 2$ puis en déterminant ...



Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

$c = (a + b) / 2$ puis en déterminant son image $f(c)$

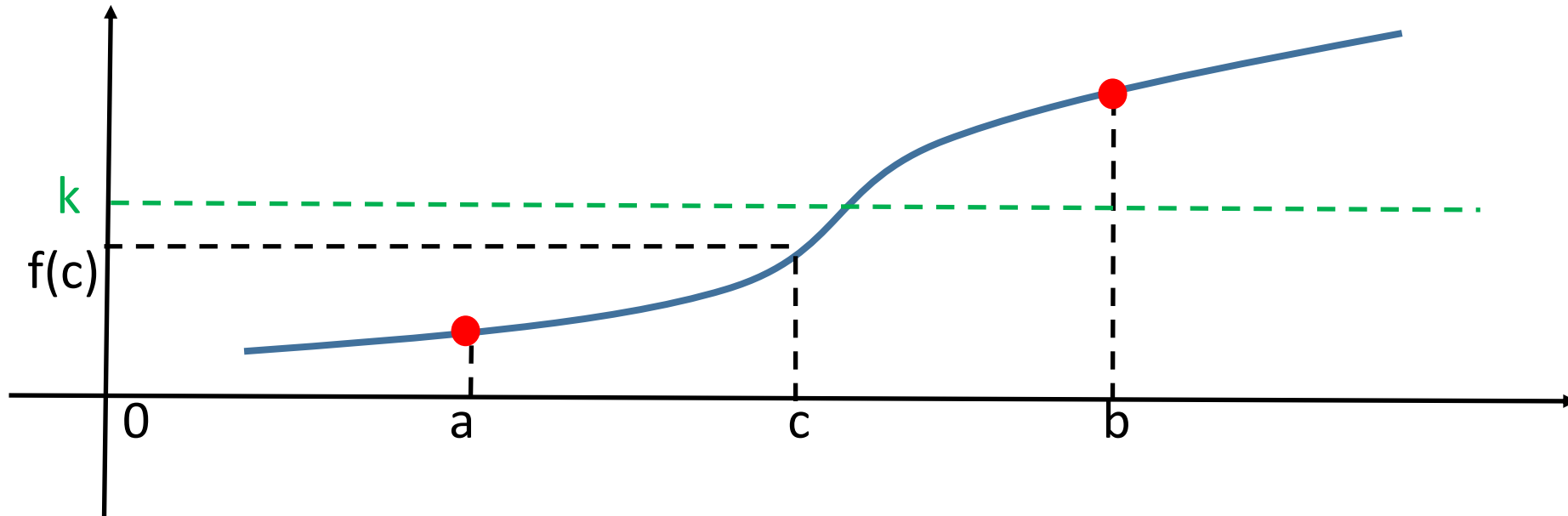


Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

$c = (a + b) / 2$ puis en déterminant son image $f(c)$

On va recommencer l'étape précédente, mais en ...

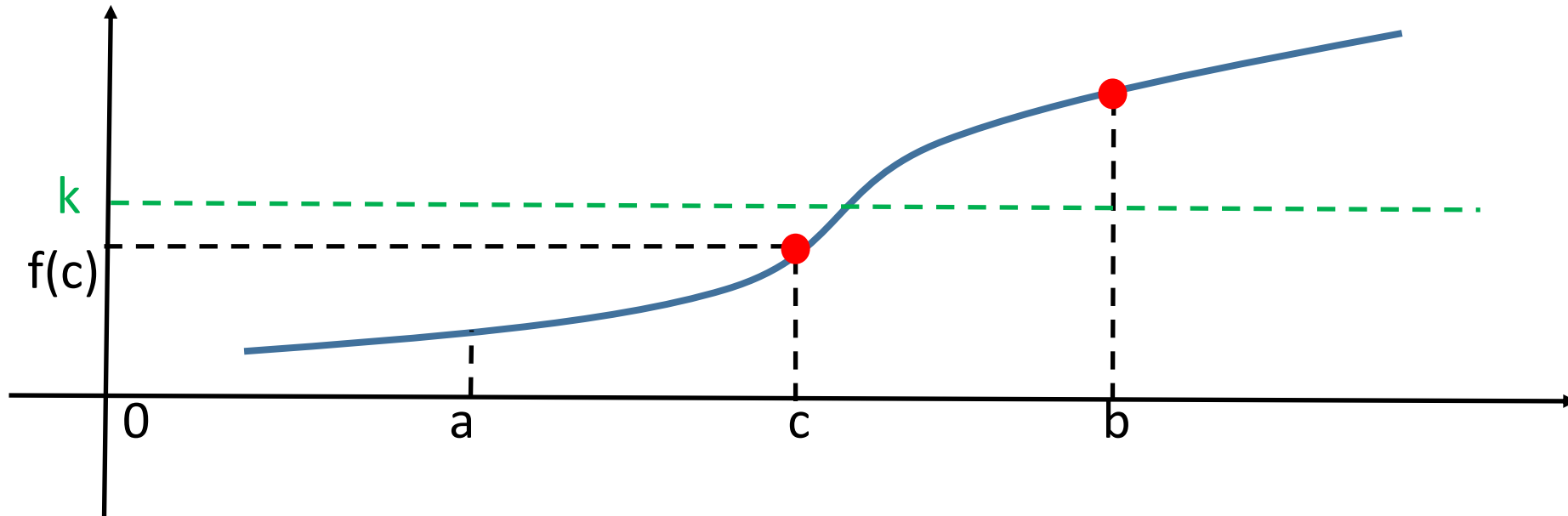


Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

$c = (a + b) / 2$ puis en déterminant son image $f(c) = d$

On va recommencer l'étape précédente, mais en prenant l'intervalle **$[c ; b]$** si ...

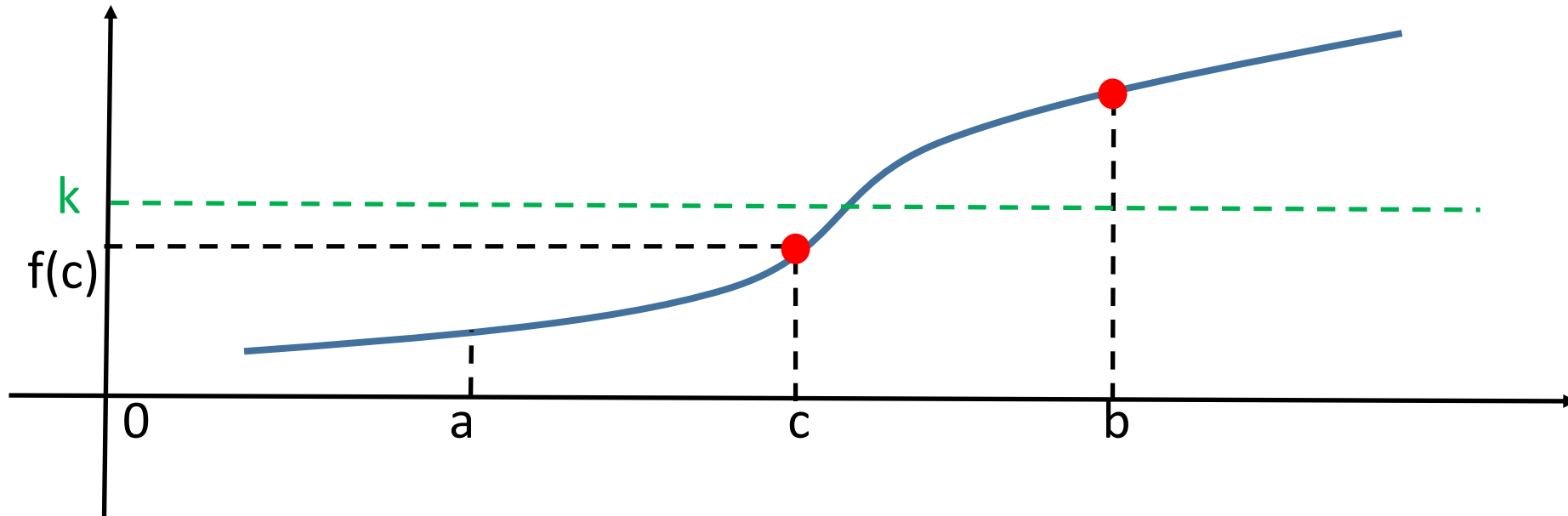


Algorithme de Dichotomie

On va **couper en deux** l'intervalle $[a ; b]$ en déterminant **son milieu c** .

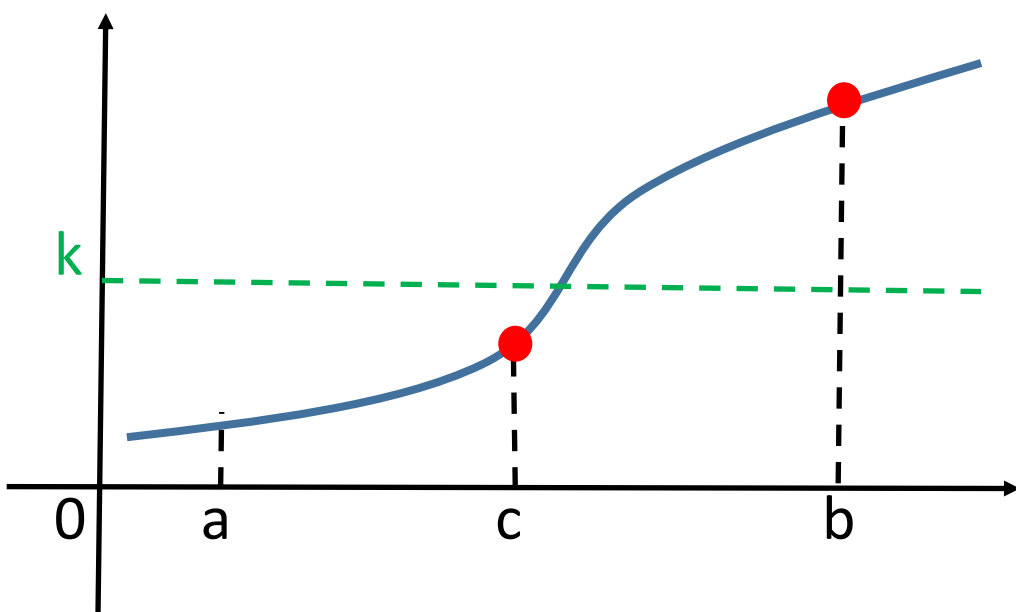
$c = (a + b) / 2$ puis en déterminant son image $f(c) = d$

On va recommencer l'étape précédente, mais en prenant l'intervalle **$[c ; b]$** si $f(c) < k$

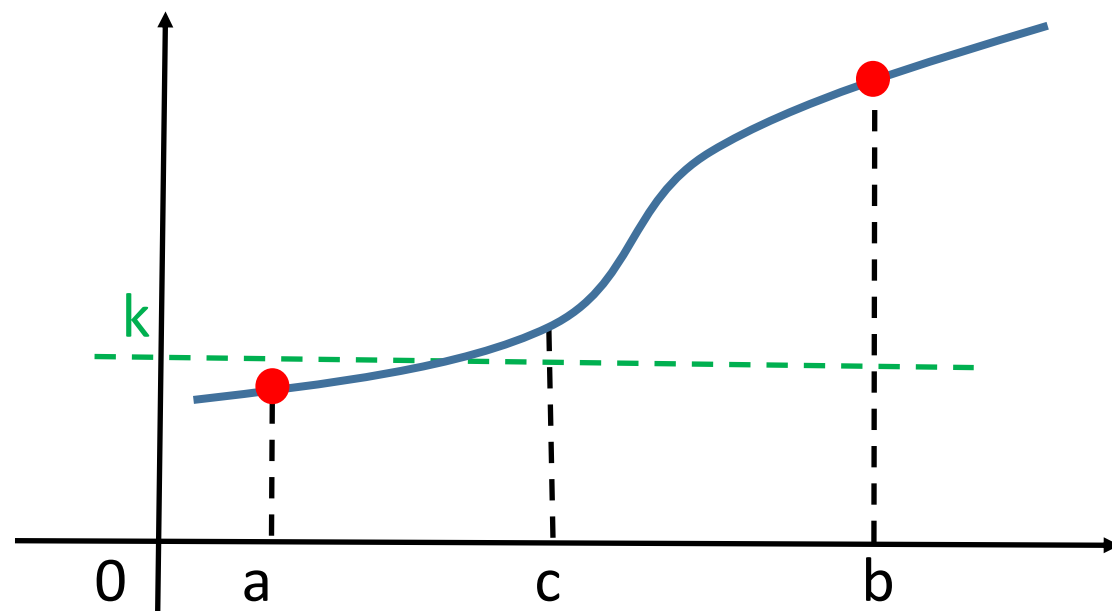


On va recommencer l'étape précédente,

en prenant l'intervalle $[c; b]$ si $f(c) < k$

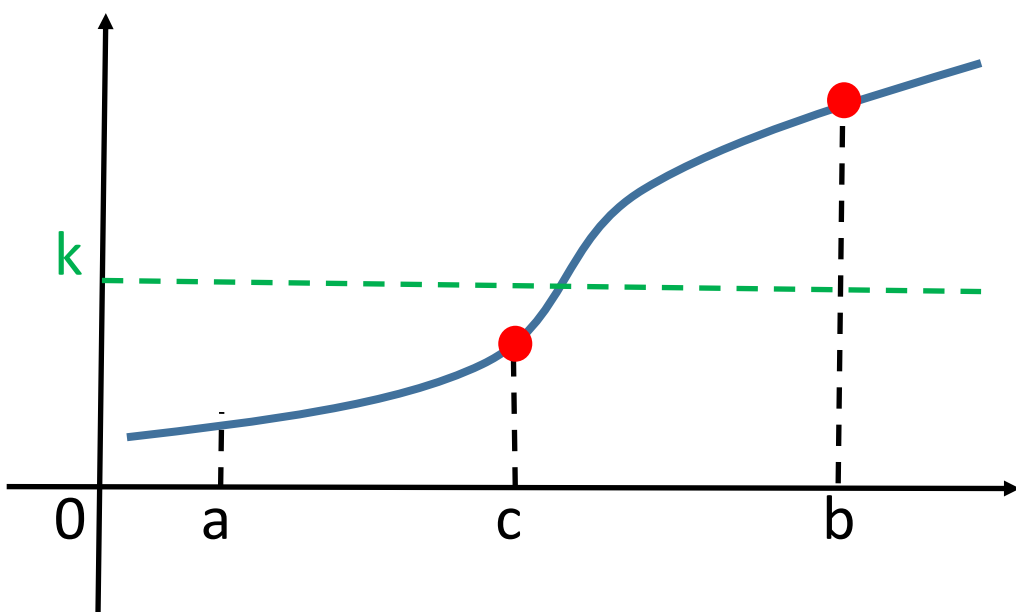


en prenant l'intervalle ...

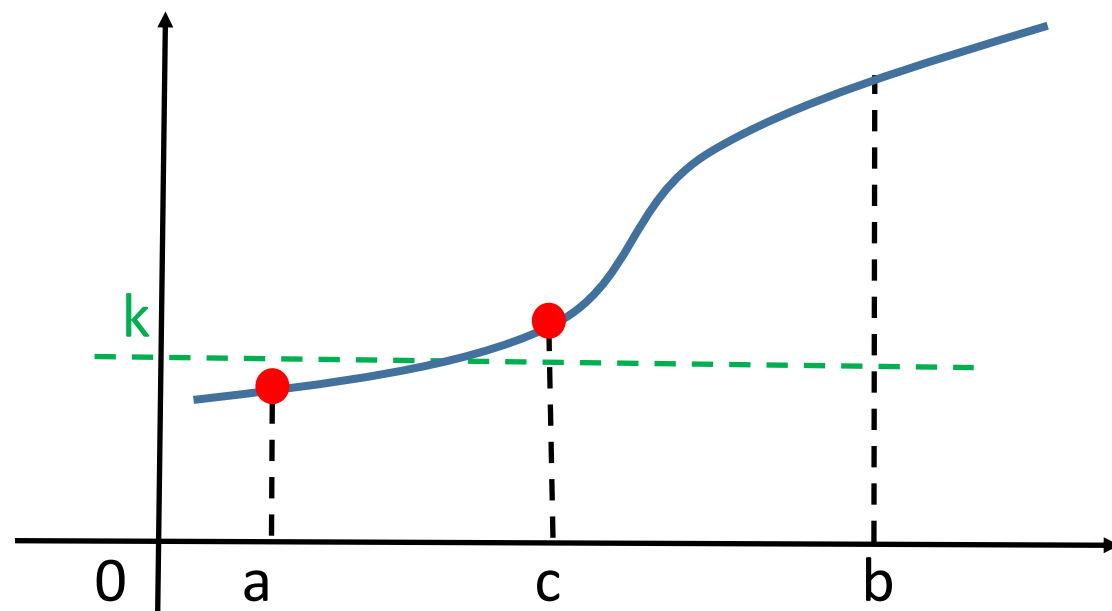


On va recommencer l'étape précédente,

en prenant l'intervalle $[c; b]$ si $f(c) < k$

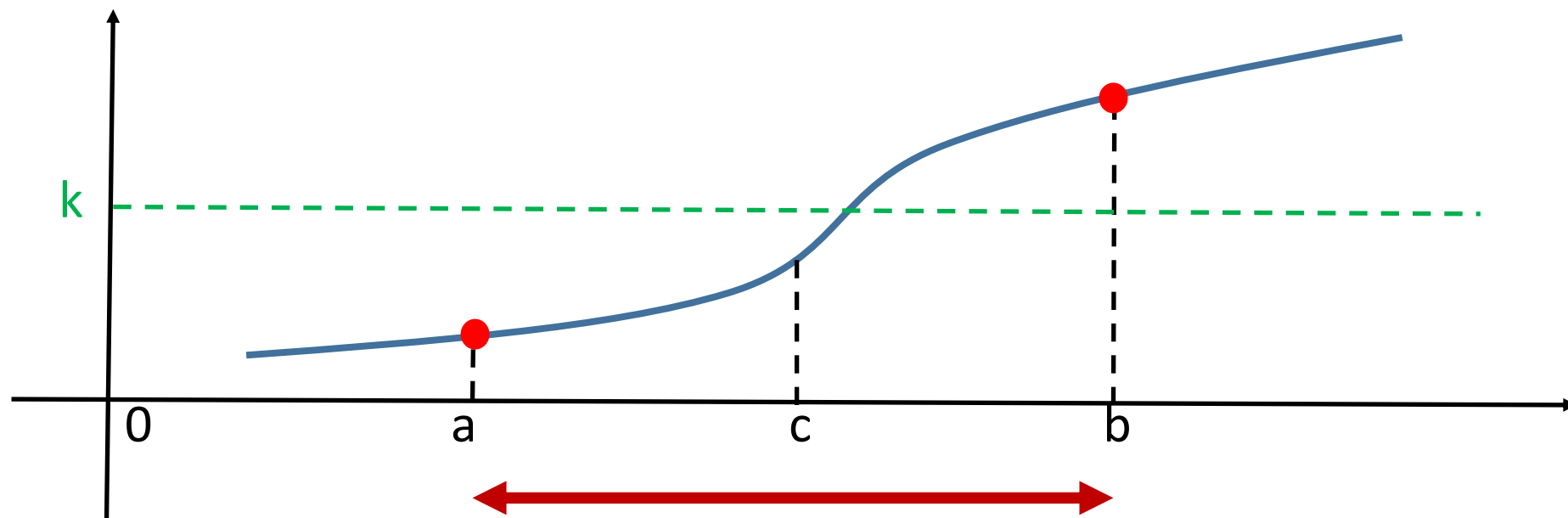


en prenant l'intervalle $[a; c]$ si $f(c) > k$



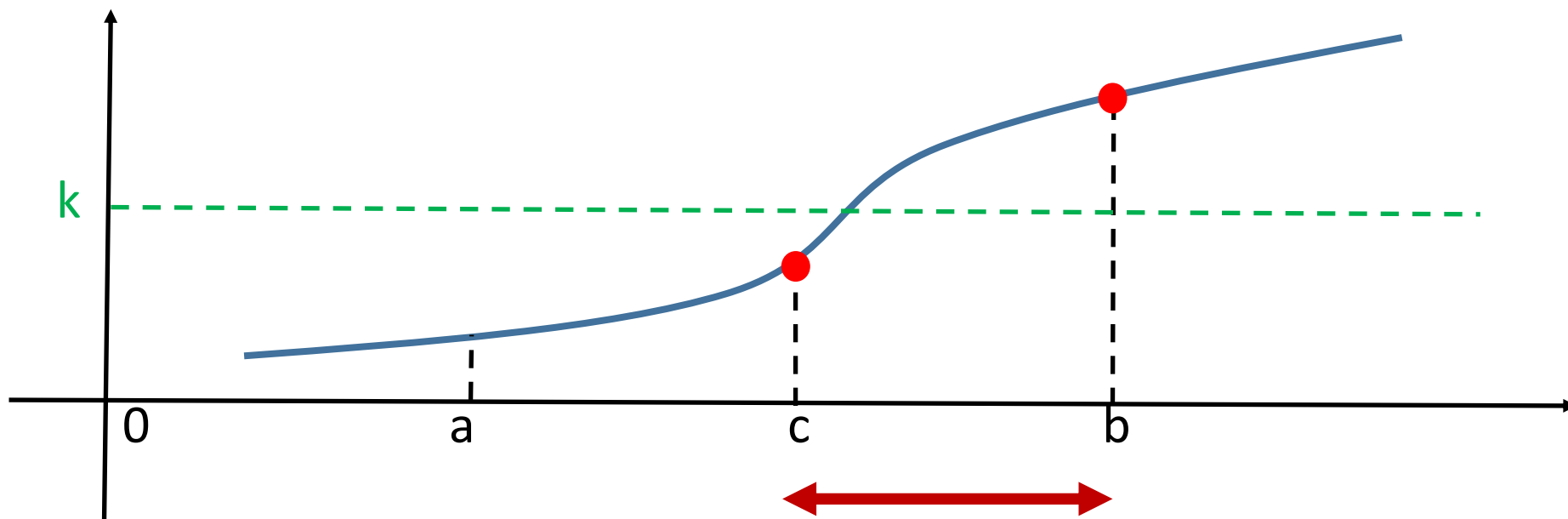
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va...

...



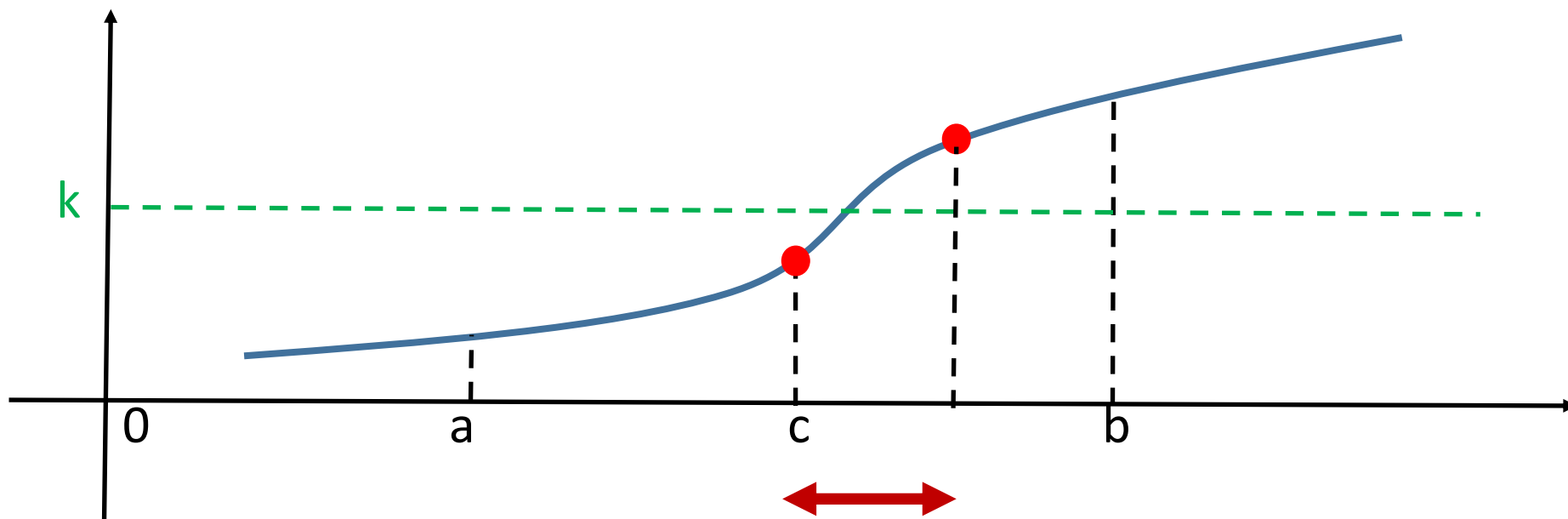
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va...

...



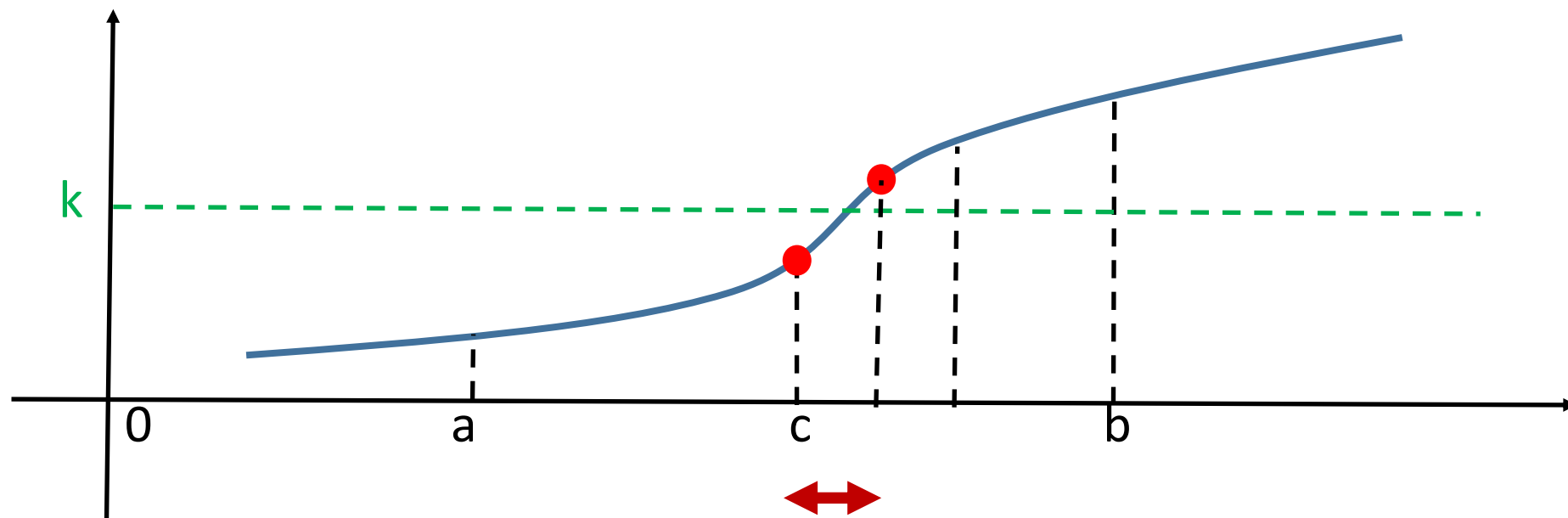
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va...

...



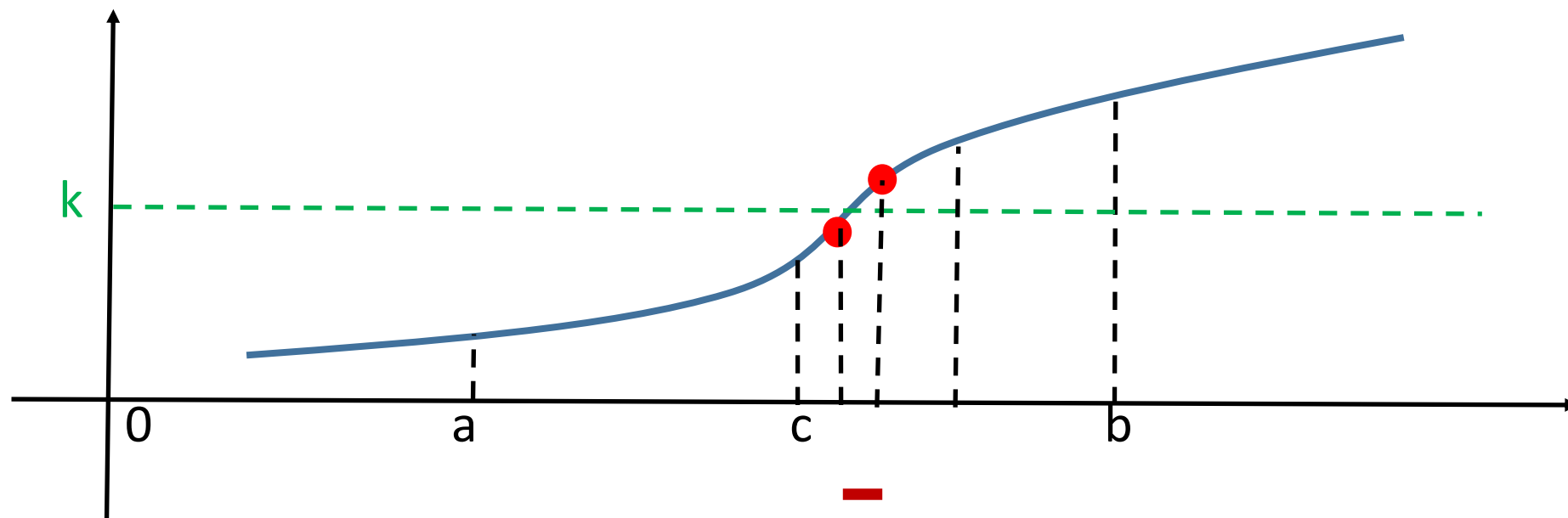
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va...

...



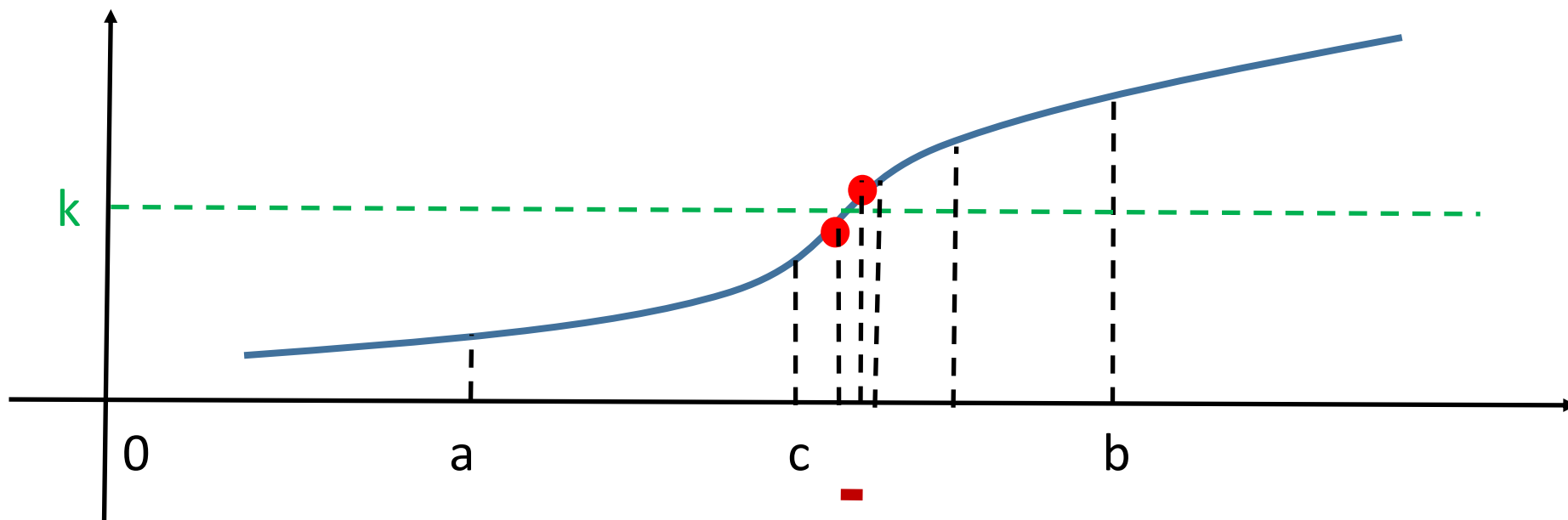
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va...

...



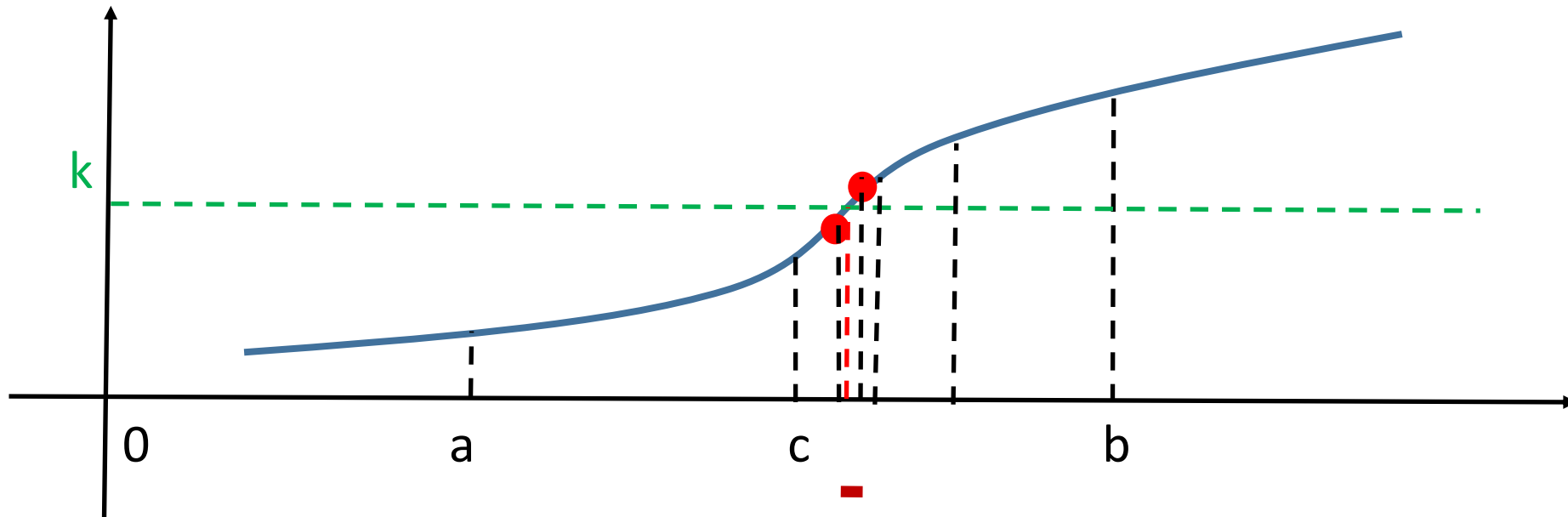
Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va...

diminuer, jusqu'à ce que ...



Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va **diminuer**, jusqu'à ce que l'écart soit plus petit que l'imprécision autorisée.

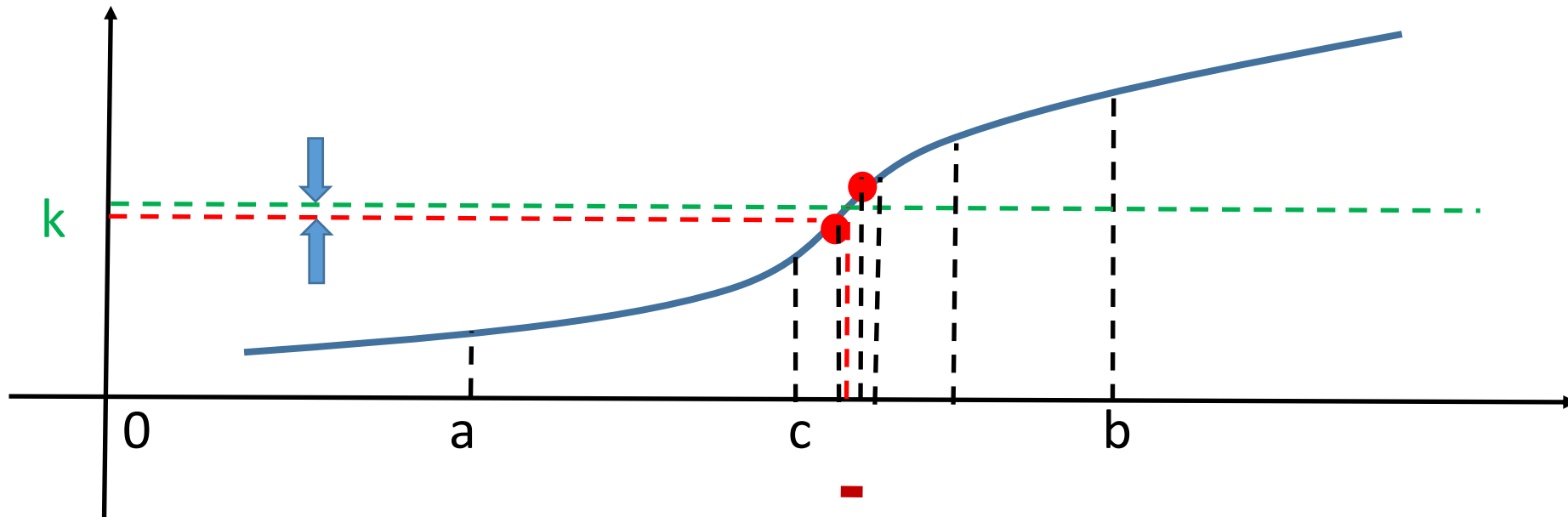
On arrêtera le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre ...



Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va **diminuer**, jusqu'à ce que l'écart soit plus petit que l'imprécision autorisée.

On arrêtera le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre les ordonnées $f(c)$ et k (1^{ère} possibilité que l'on choisira).

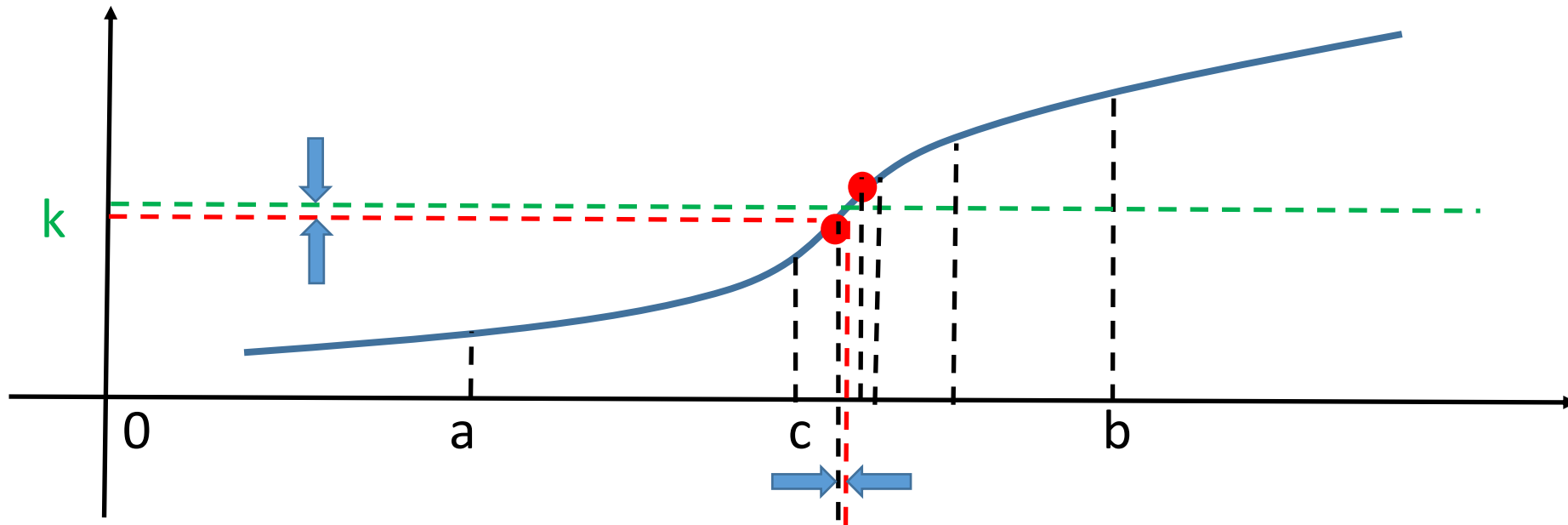
On ne peut pas le faire entre ...



Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va **diminuer**, jusqu'à ce que l'écart soit plus petit que l'imprécision autorisée.

On arrêtera le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre les ordonnées $f(c)$ et k (1^{ère} possibilité que l'on choisira).

On ne peut pas le faire entre c et la solution x cherchée, car ...

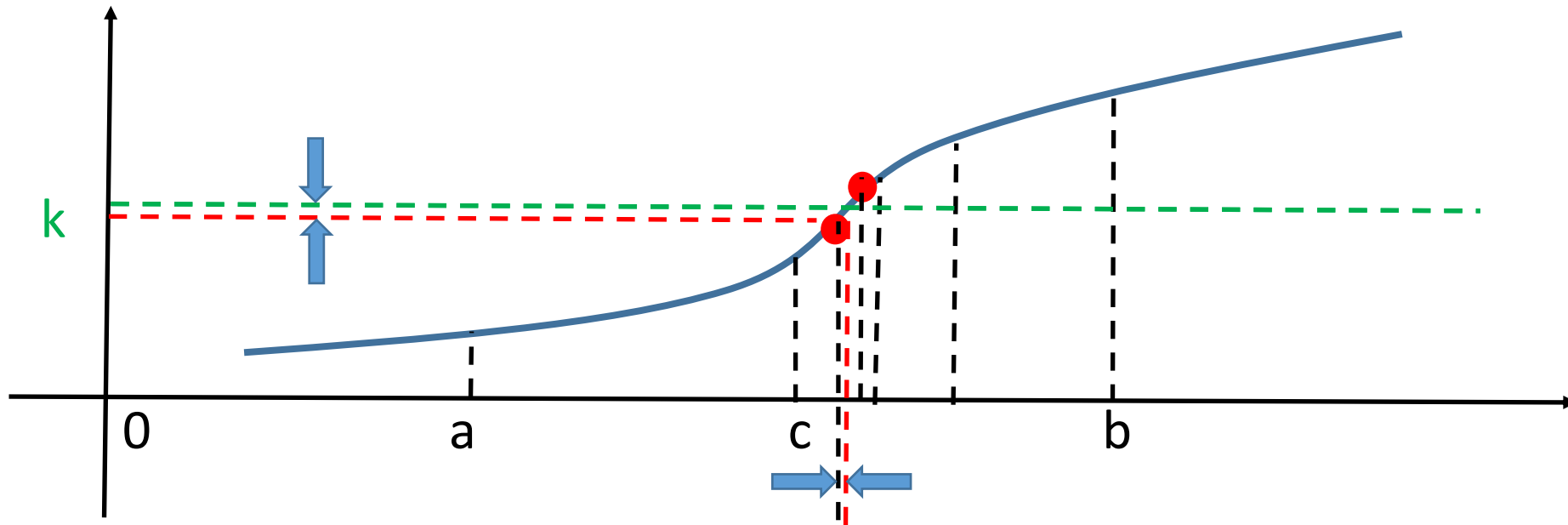


Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va **diminuer**, jusqu'à ce que l'écart soit plus petit que l'imprécision autorisée.

On arrêtera le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre les ordonnées $f(c)$ et k (1^{ère} possibilité que l'on choisira).

On ne peut pas le faire entre **c** et la solution **x** cherchée, car on ne la connaît pas.

On peut arrêter le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre les abscisses, si on mesure l'écart entre ...

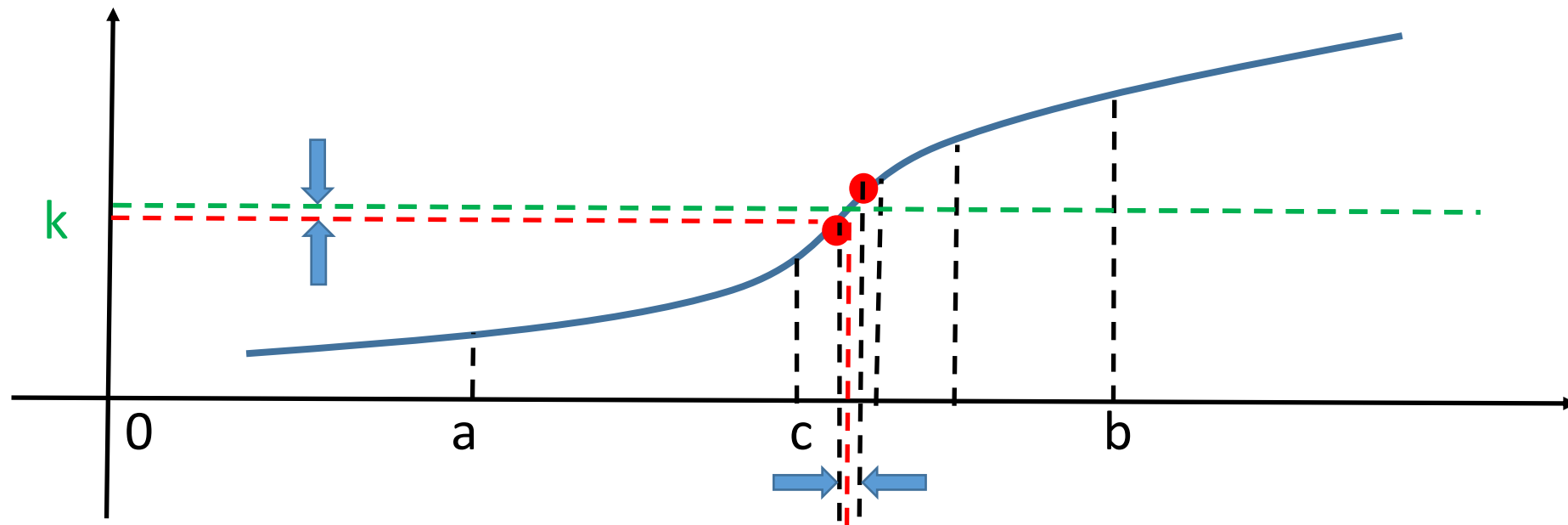


Au fur et à mesure, l'intervalle d'étude va **diminuer**, jusqu'à ce que l'écart soit plus petit que l'imprécision autorisée.

On arrêtera le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre les ordonnées $f(c)$ et k (1^{ère} possibilité que l'on choisira).

On ne peut pas le faire entre c et la solution x cherchée, car on ne la connaît pas.

On peut arrêter le programme lorsque l'écart sera devenu suffisamment petit entre les abscisses, si on mesure l'écart entre a et b (autre possibilité).



Organigramme :

Données :

On prendra la fonction carré (pour une autre fonction, il faudra rentrer dans le programme pour changer l'expression de la fonction).

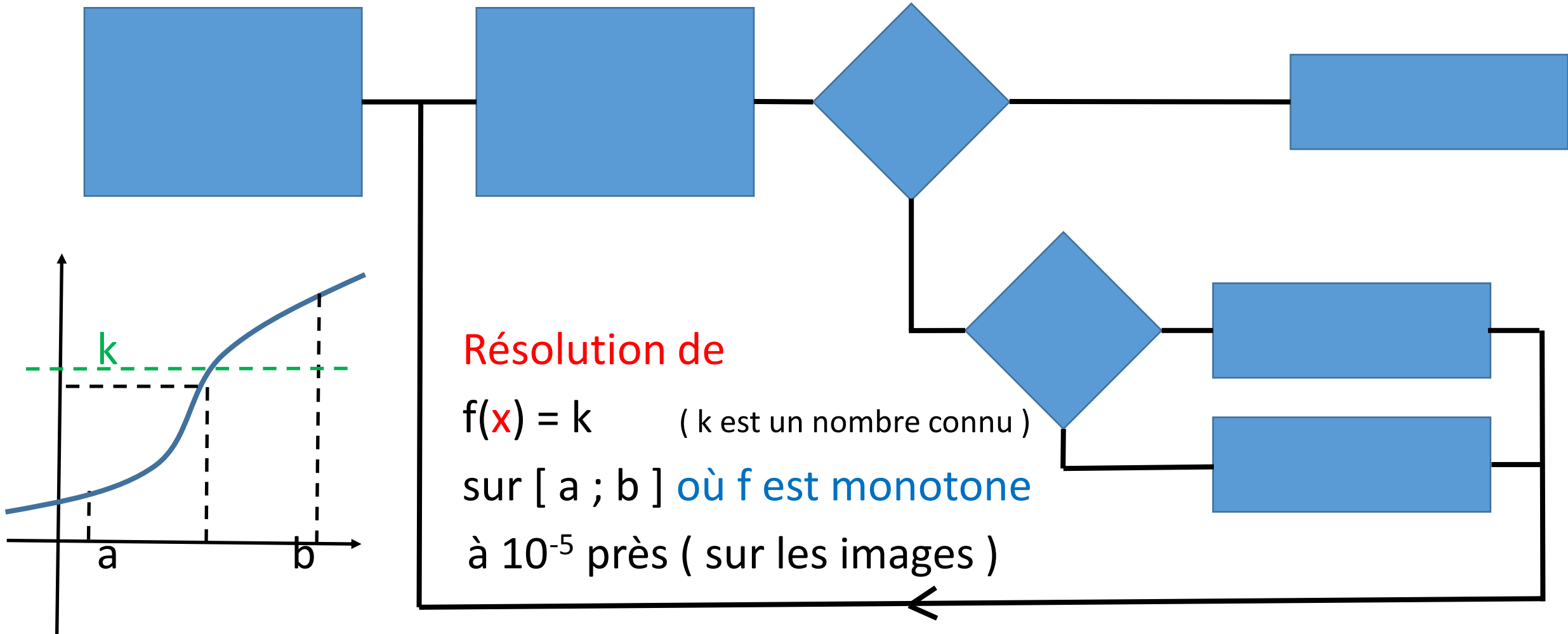
L'imprécision sera de 10^{-5} sur les images (on peut aussi la faire sur les antécédents).

donc il faudra s'arrêter lorsque $f(c)$ et k seront distants de moins de 10^{-5}
et $f(c)$ peut être sup. ou inf. à k , donc utiliser la valeur absolue $| f(c) - k | \leq 10^{-5}$

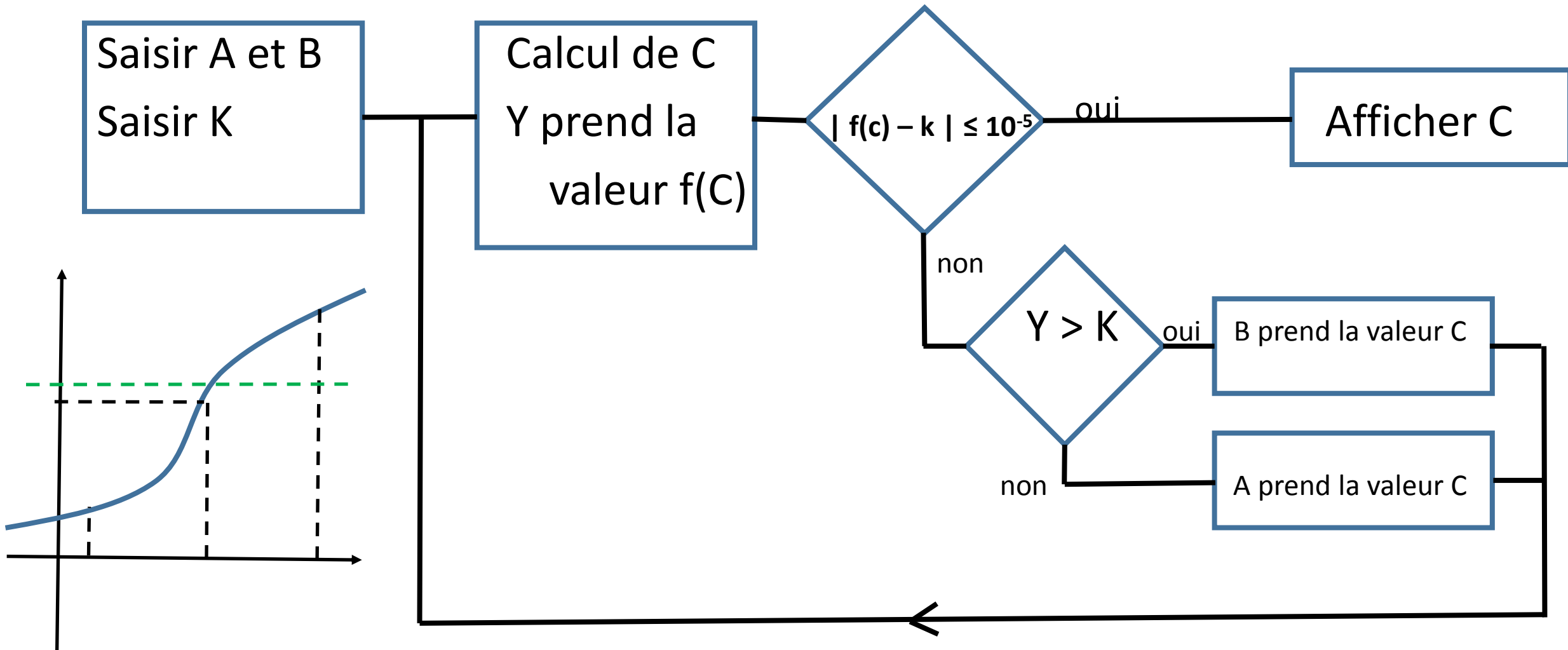
On veut que l'algorithme permette de donner une solution approchée de l'équation $f(x) = k$ sur l'intervalle $[a ; b]$,

pour tout réel k sur tout intervalle $[a ; b]$ où la fonction est monotone,
donc saisir à chaque utilisation les valeurs de a , b et k .

Organigramme de **dichotomie** :

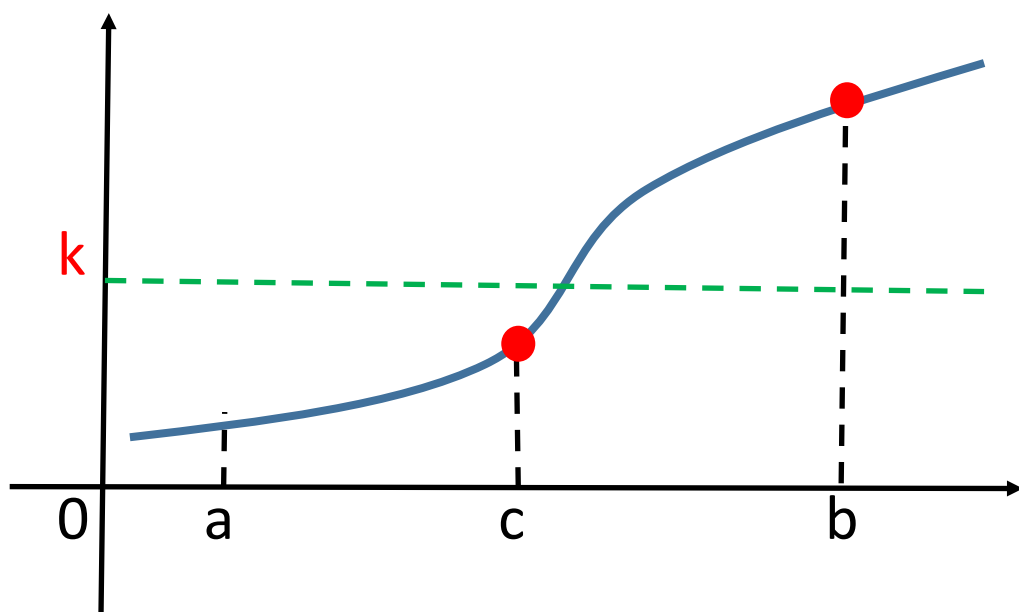


Organigramme :

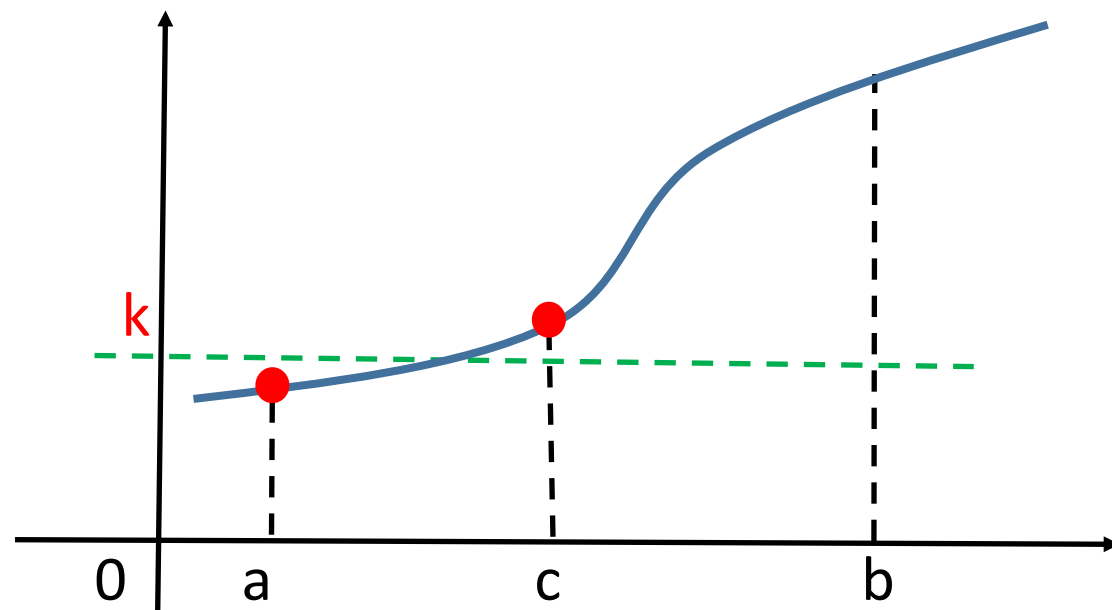


Cet organigramme convient-il à **tous les cas** ?

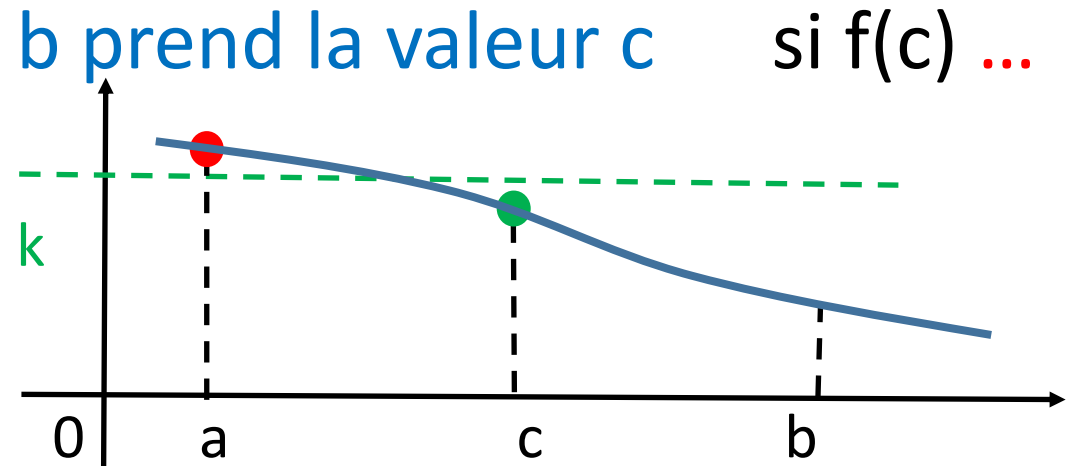
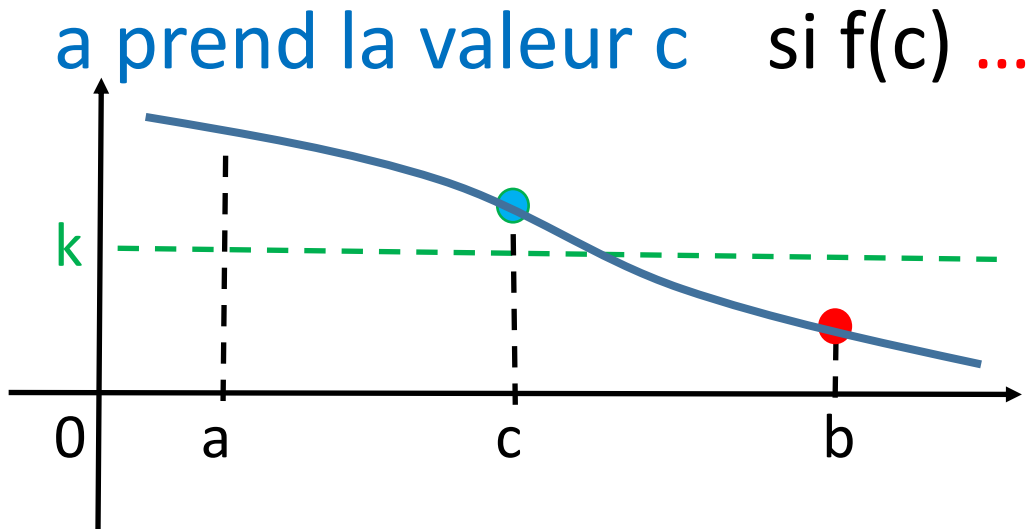
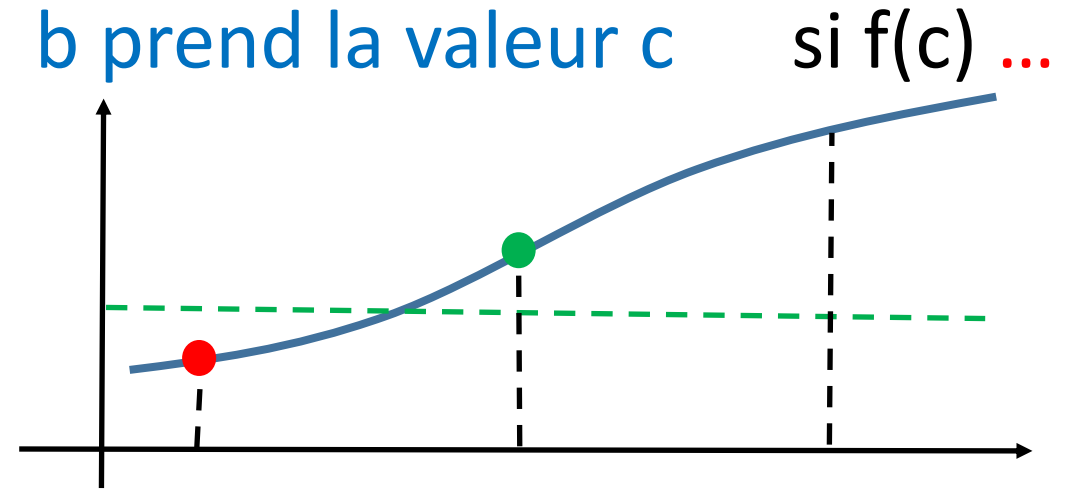
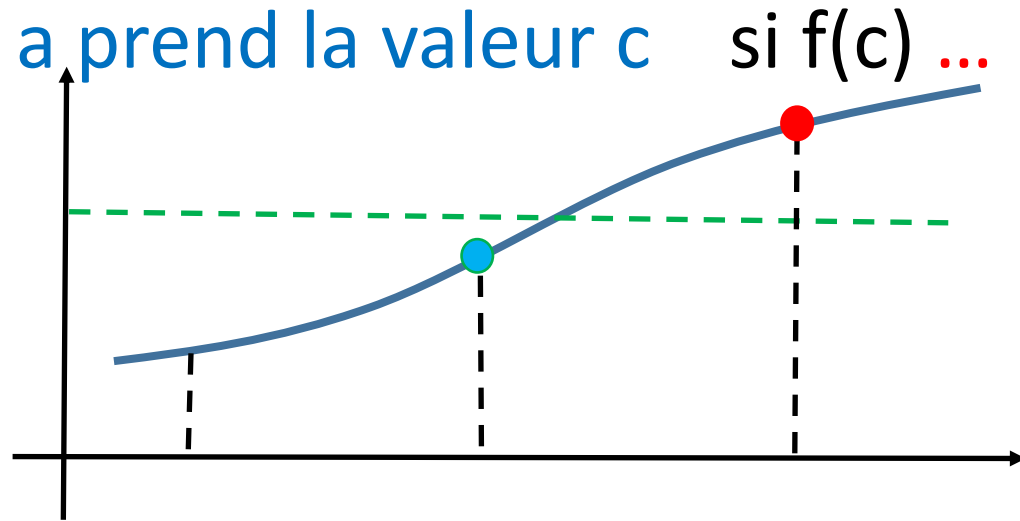
a prend la valeur c si $f(c) < k$



b prend la valeur c si $f(c) > k$

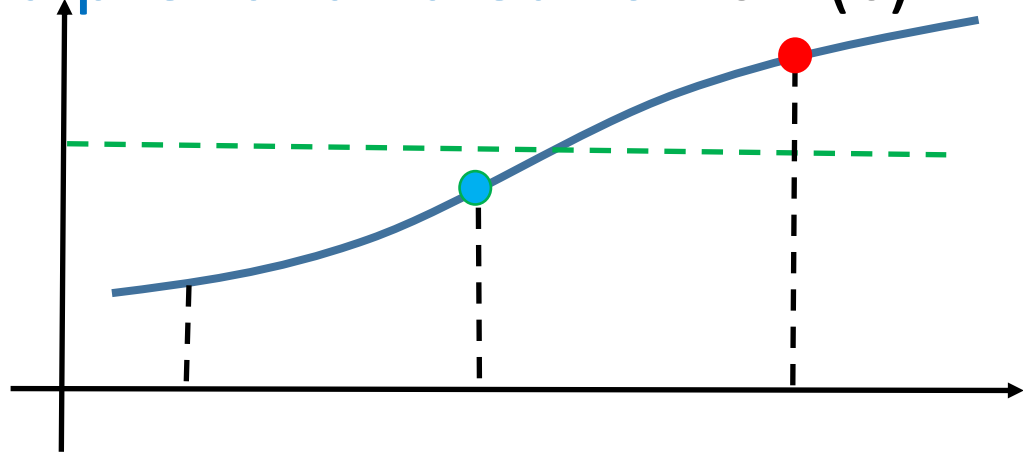


Convient-il pour les cas où la fonction est **décroissante** ?

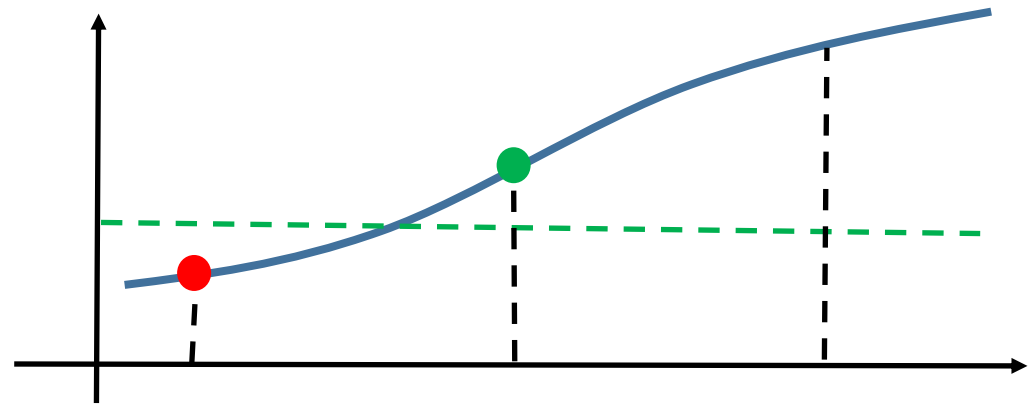


Convient-il pour les cas où la fonction est **décroissante** ?

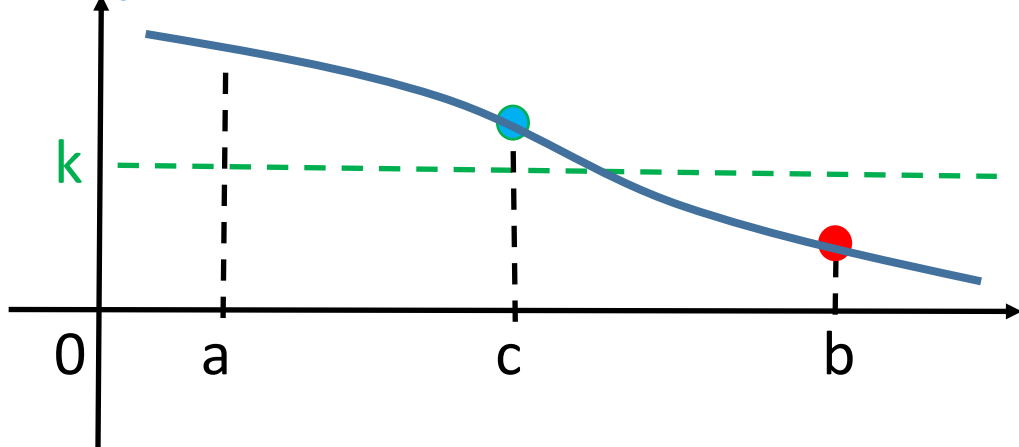
a prend la valeur c si $f(c) < k$



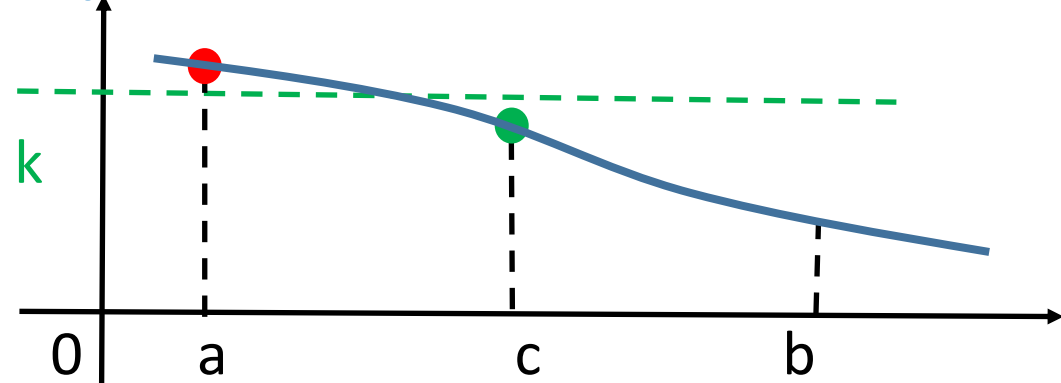
b prend la valeur c si $f(c) > k$



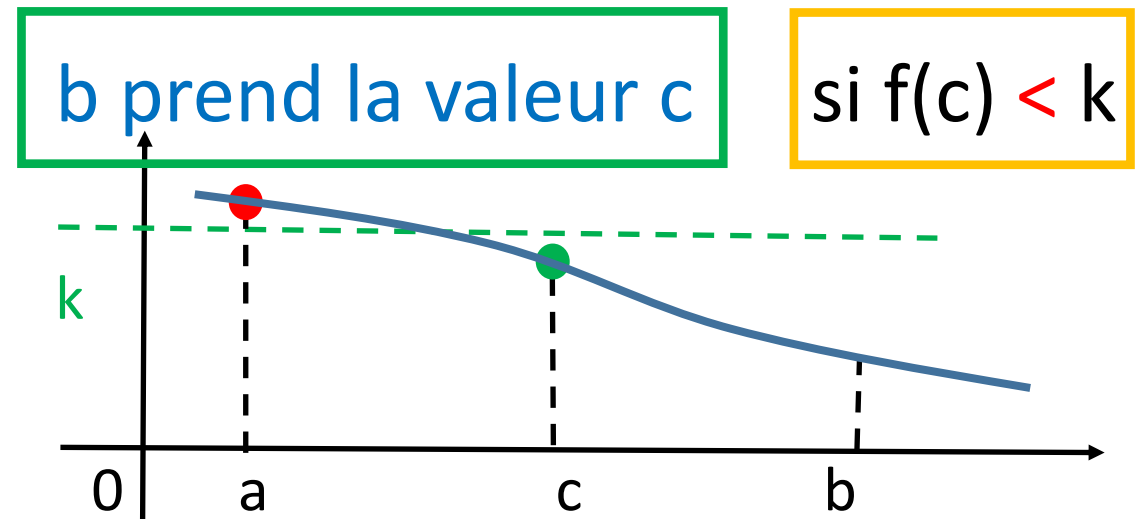
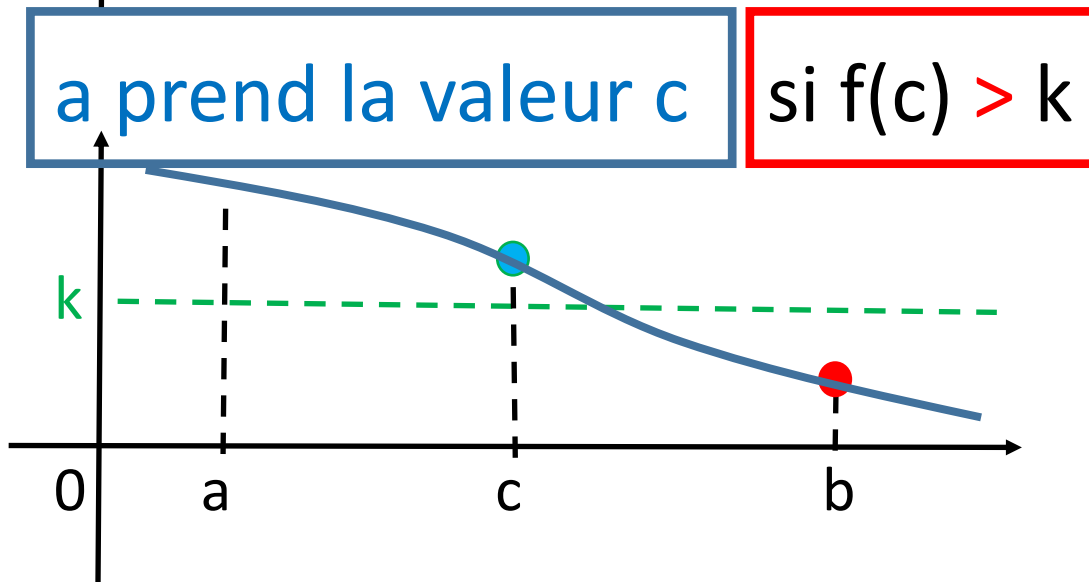
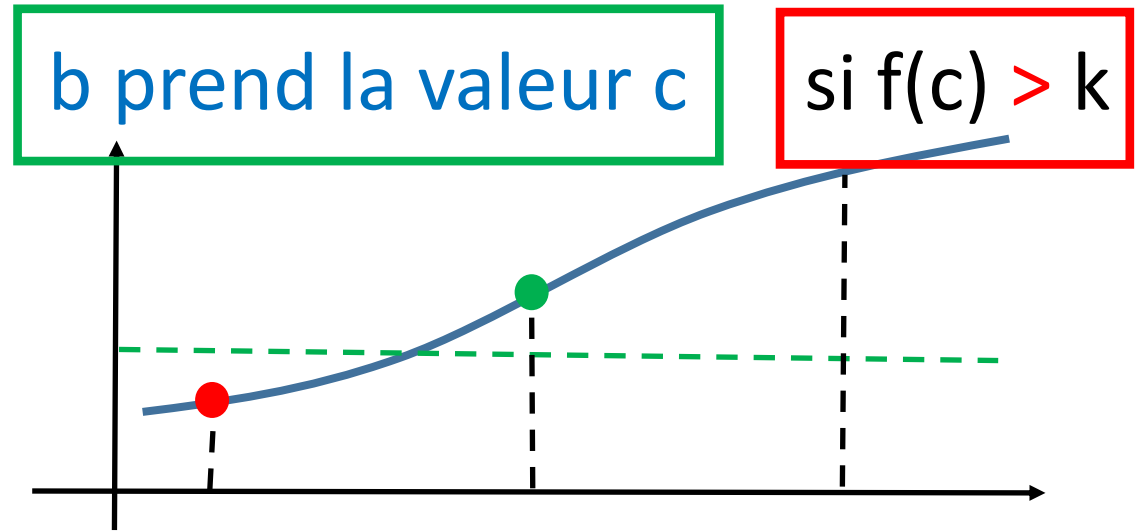
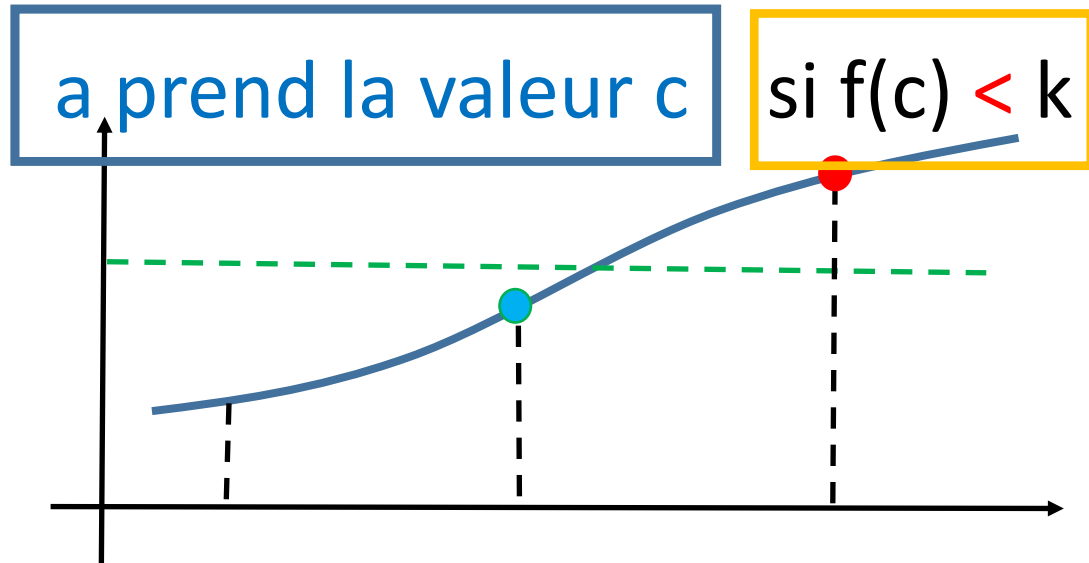
a prend la valeur c si $f(c) > k$



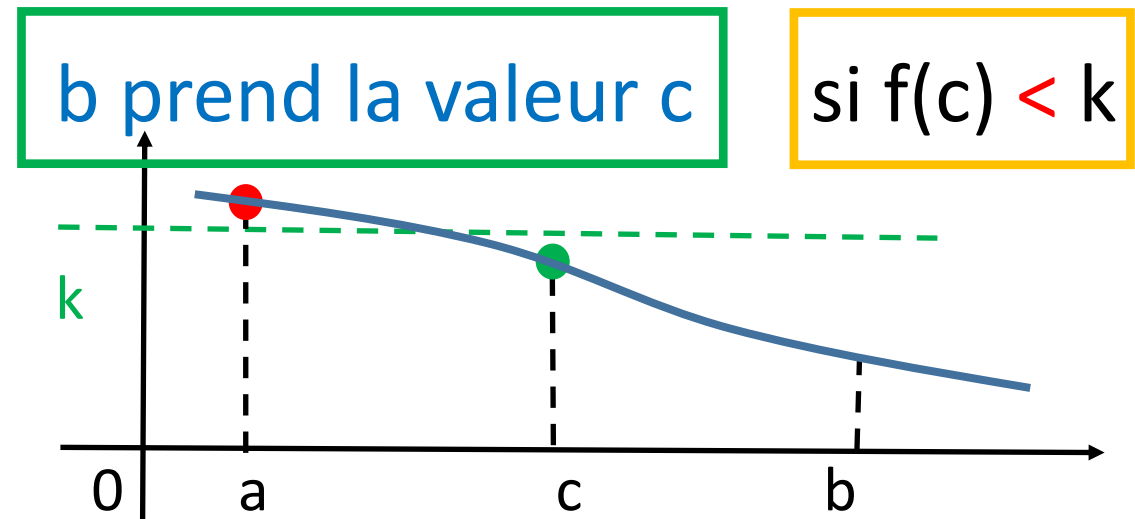
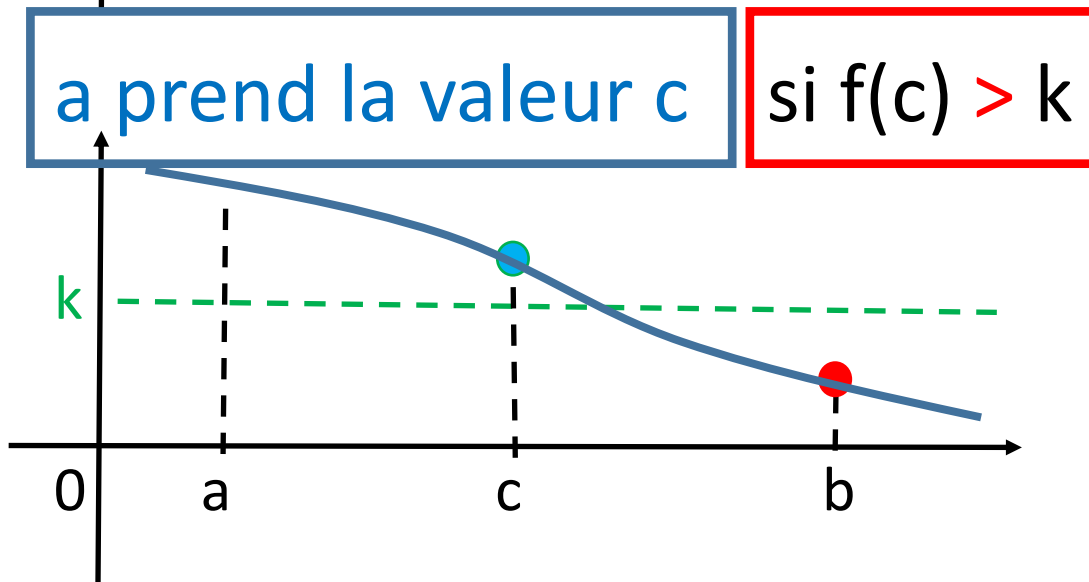
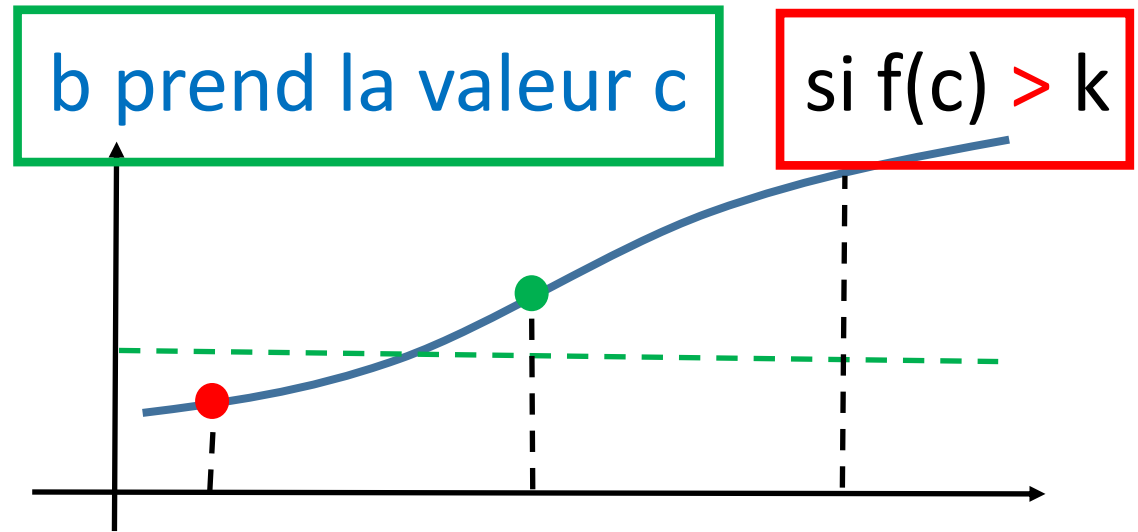
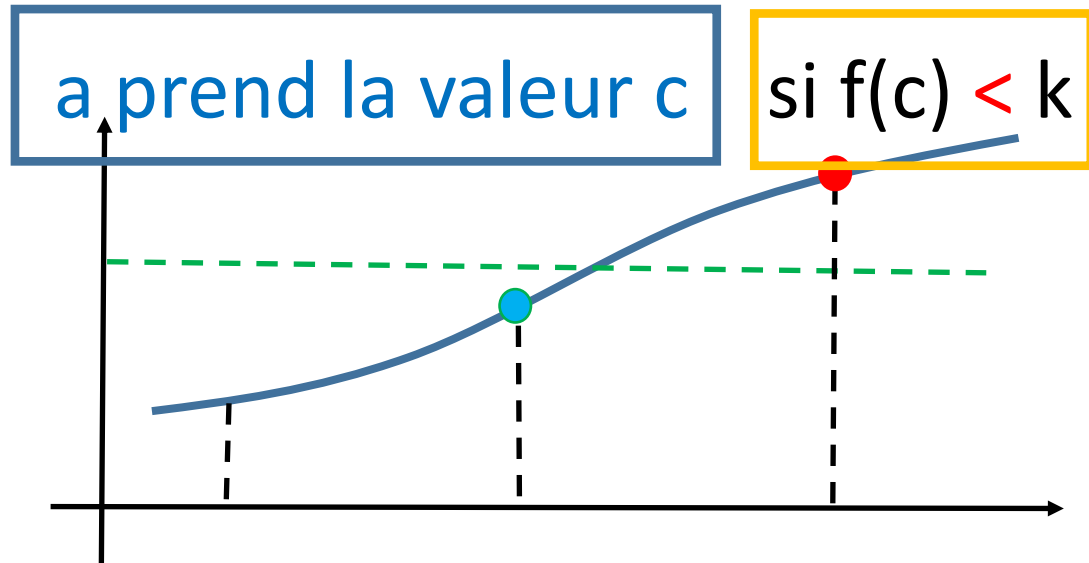
b prend la valeur c si $f(c) < k$



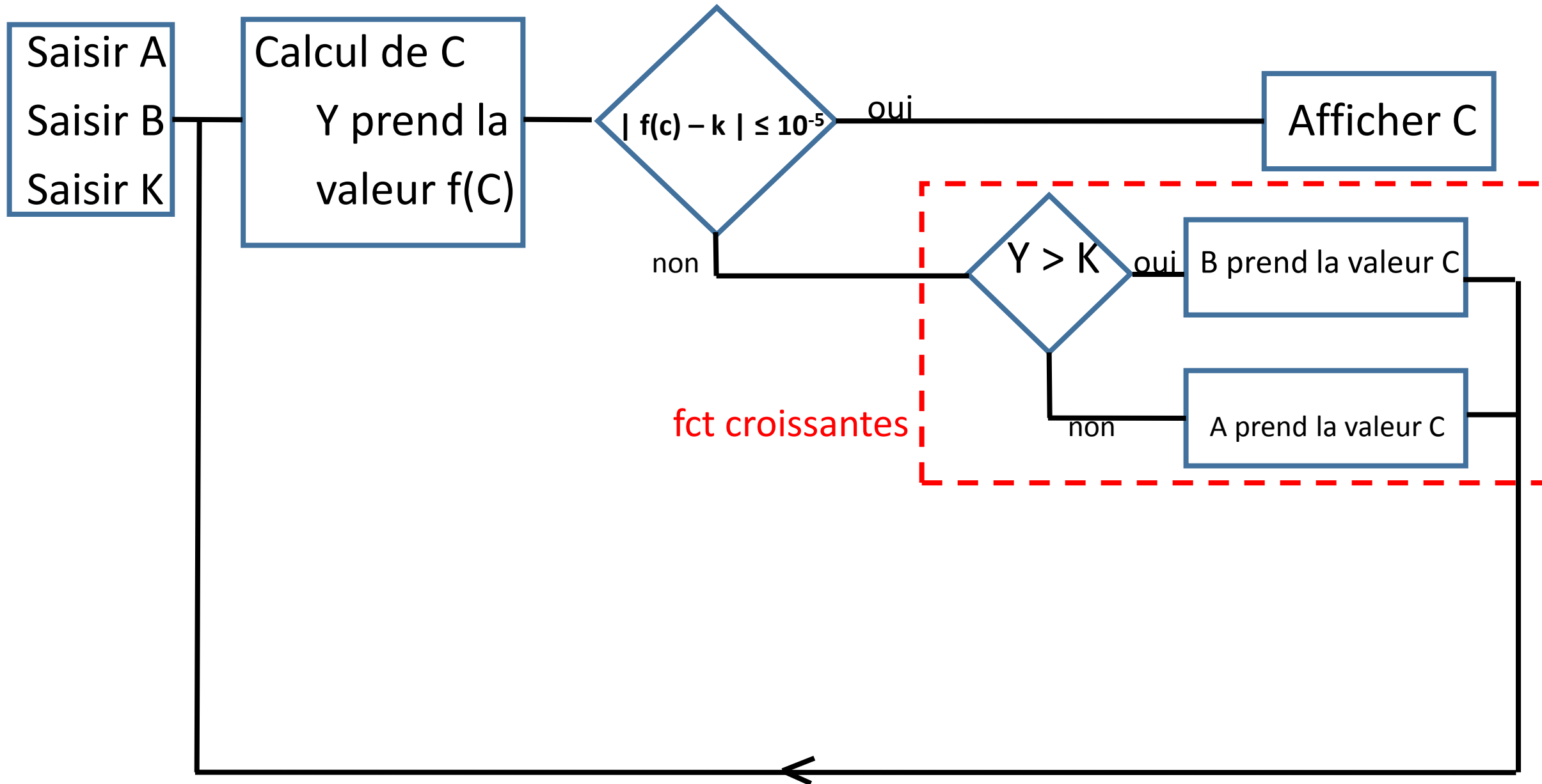
Conclusion : conditions contraires pour les mêmes actions
ou : ... ?



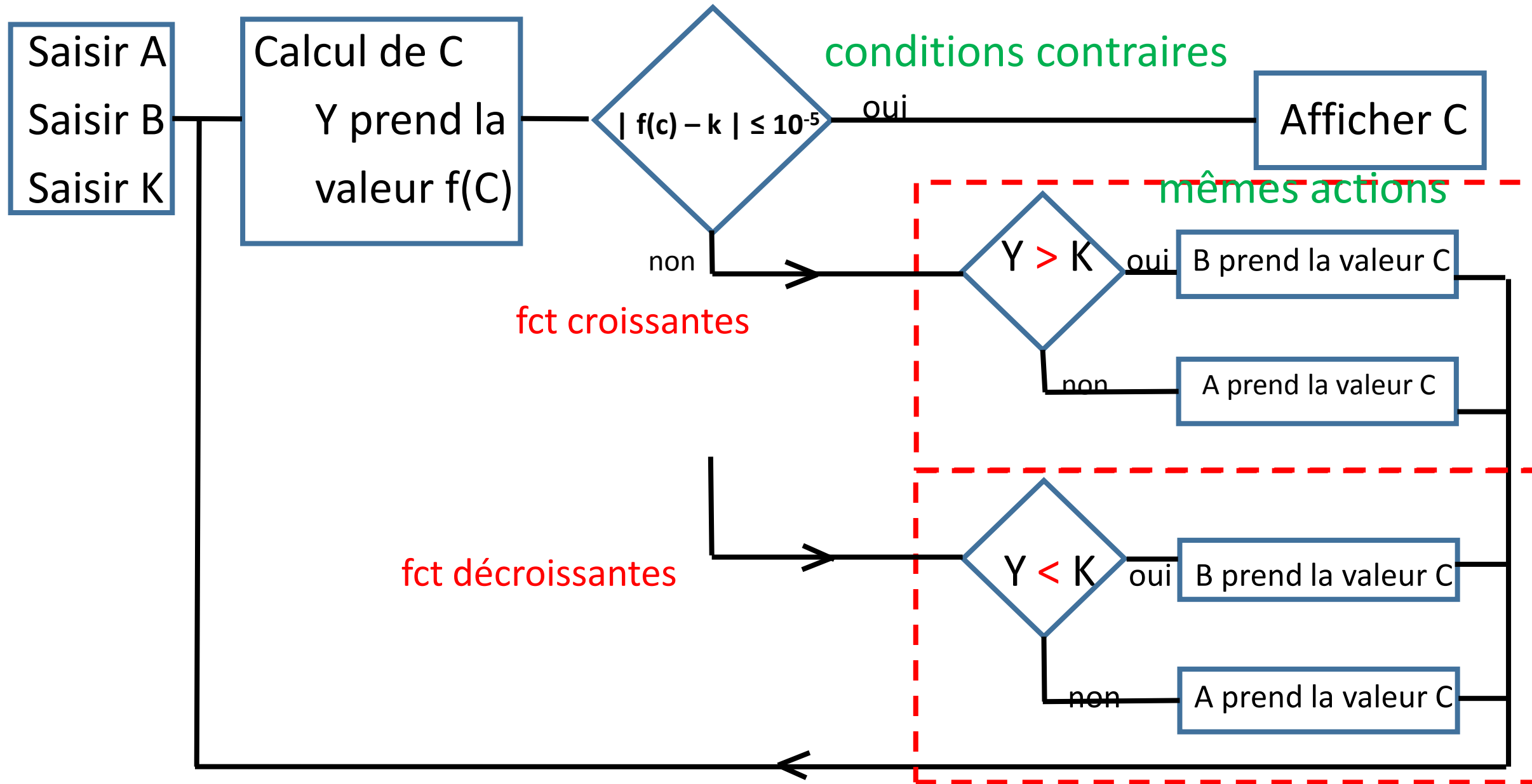
Conclusion : conditions contraires pour les mêmes actions
ou : même condition pour des actions contraires

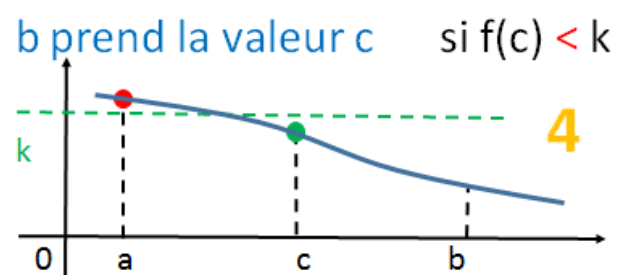
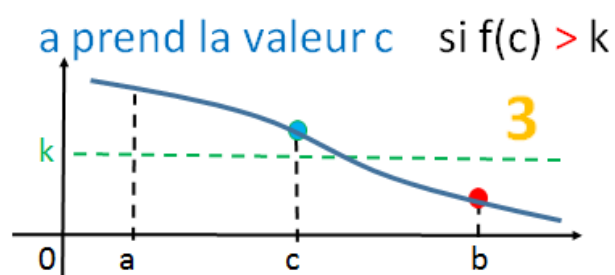
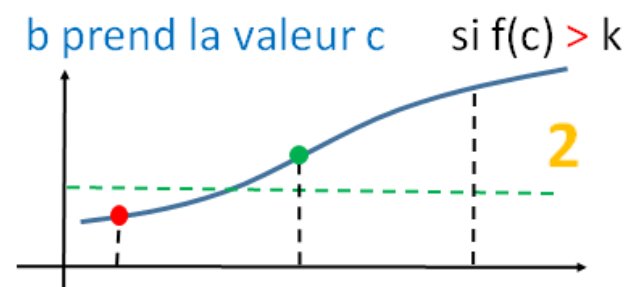
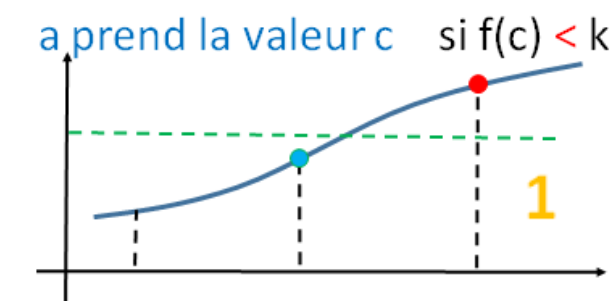


Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité



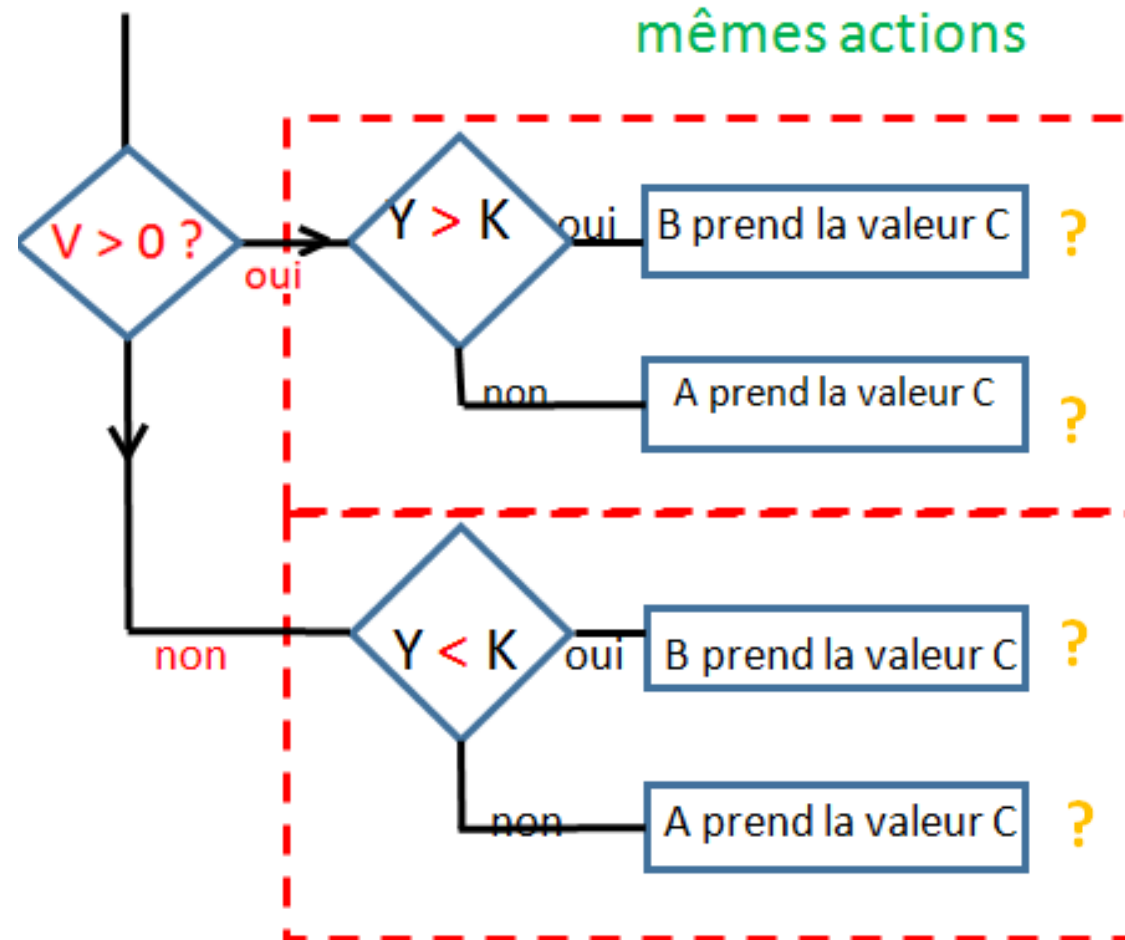
Modification de l'organigramme : 1^{ère} possibilité

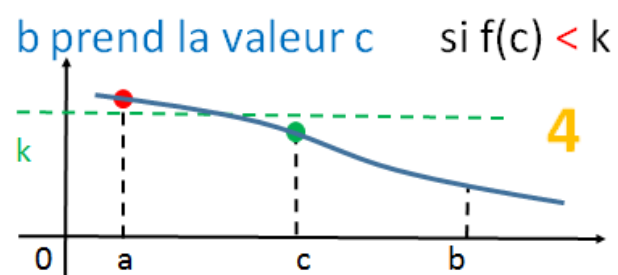
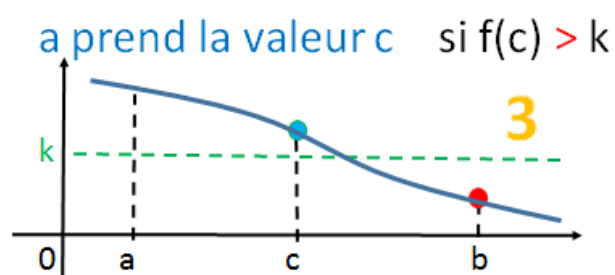
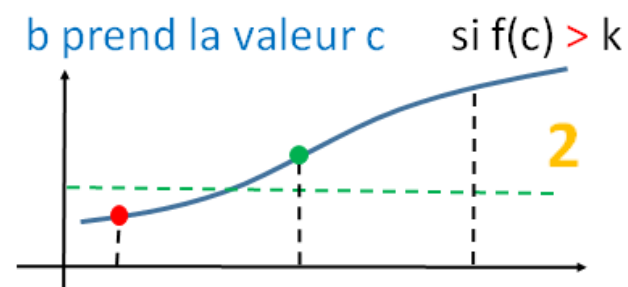
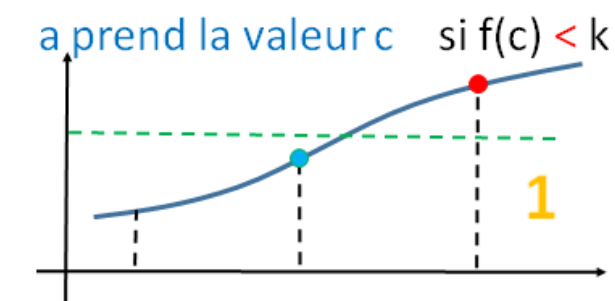




conditions contraires

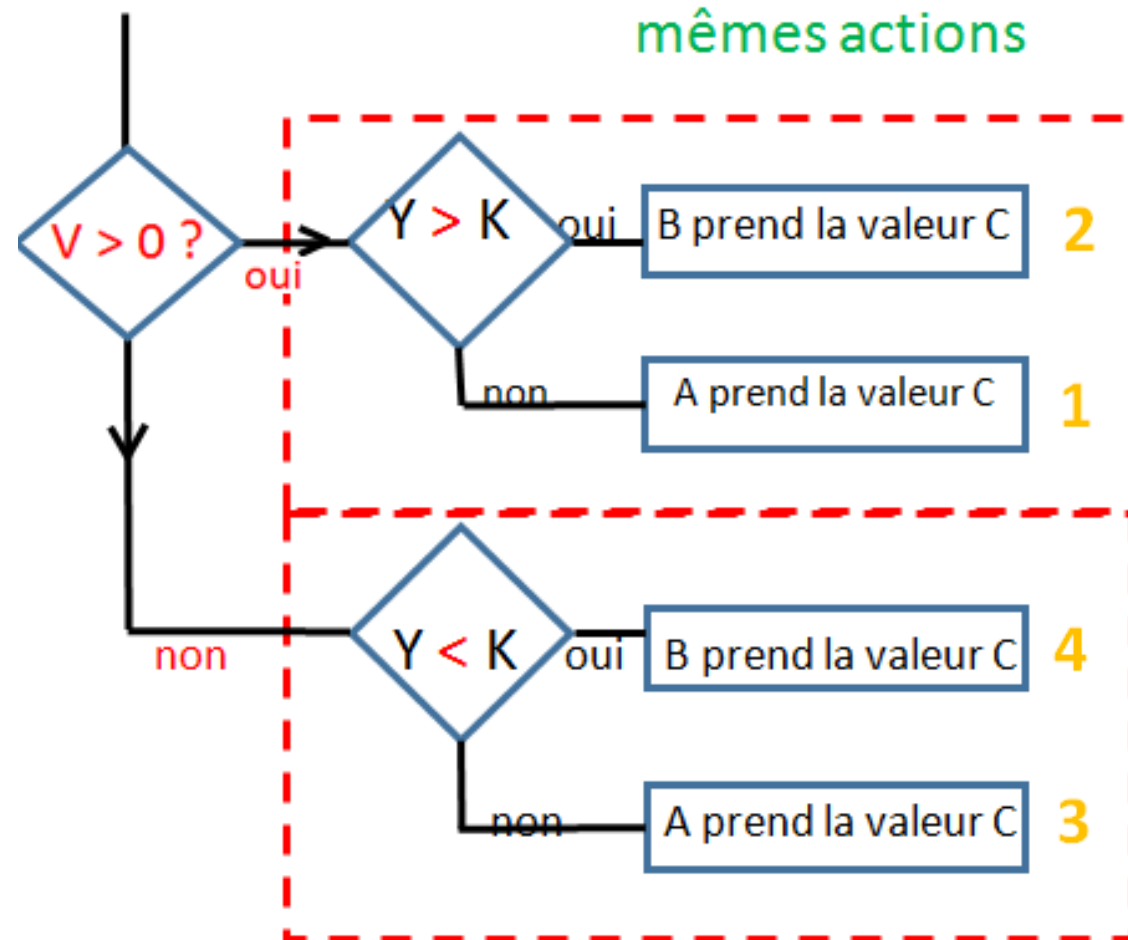
mêmes actions



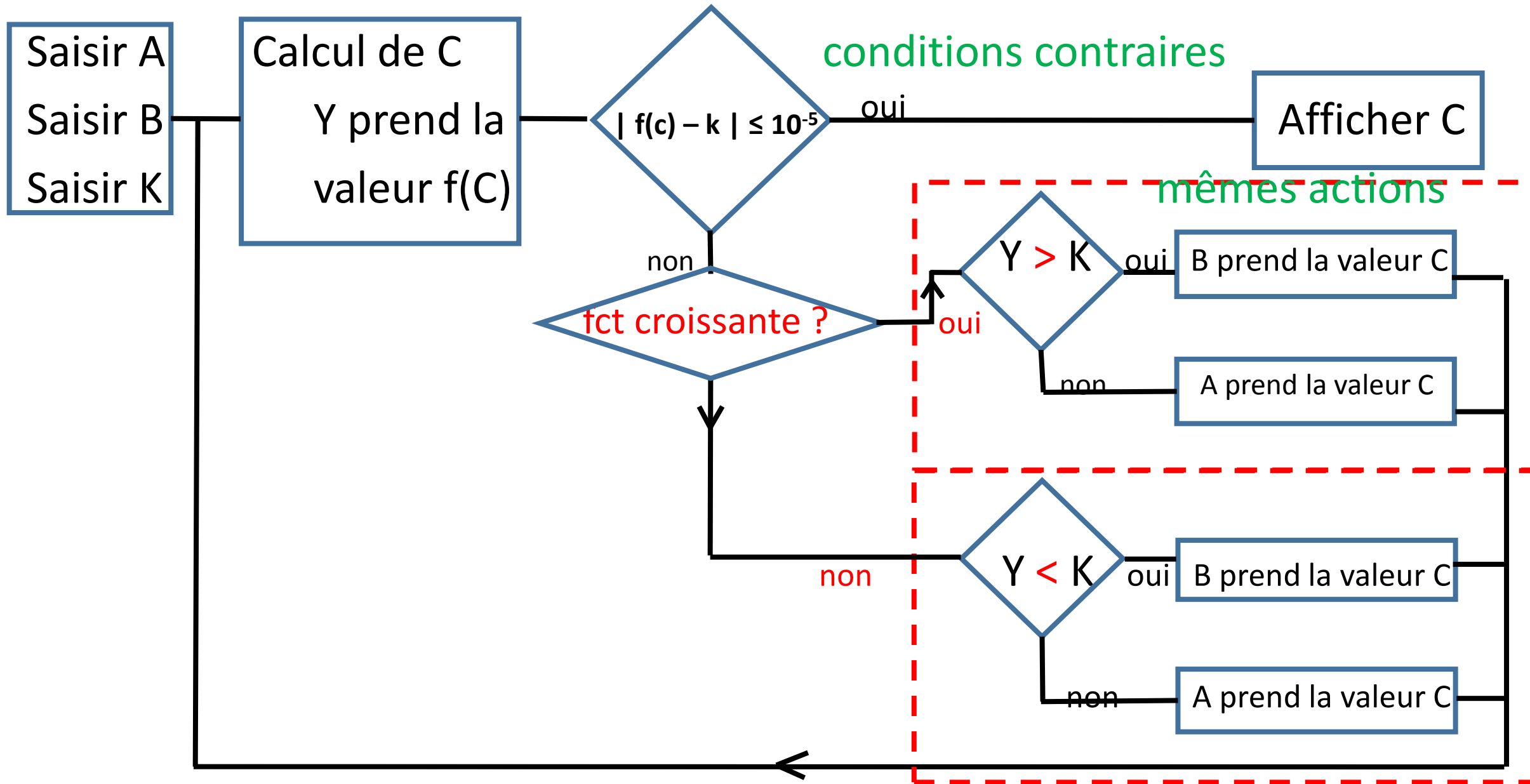


conditions contraires

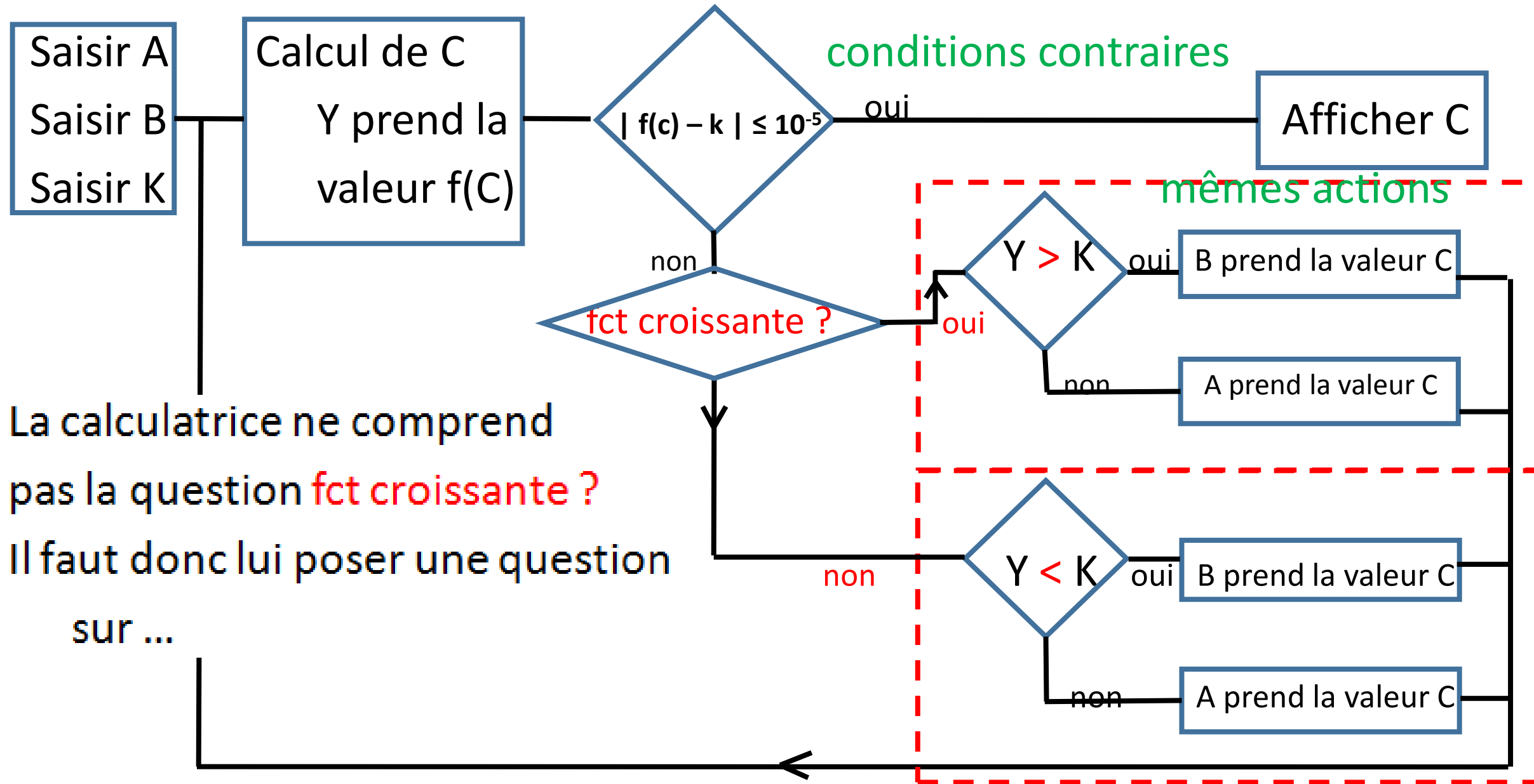
mêmes actions



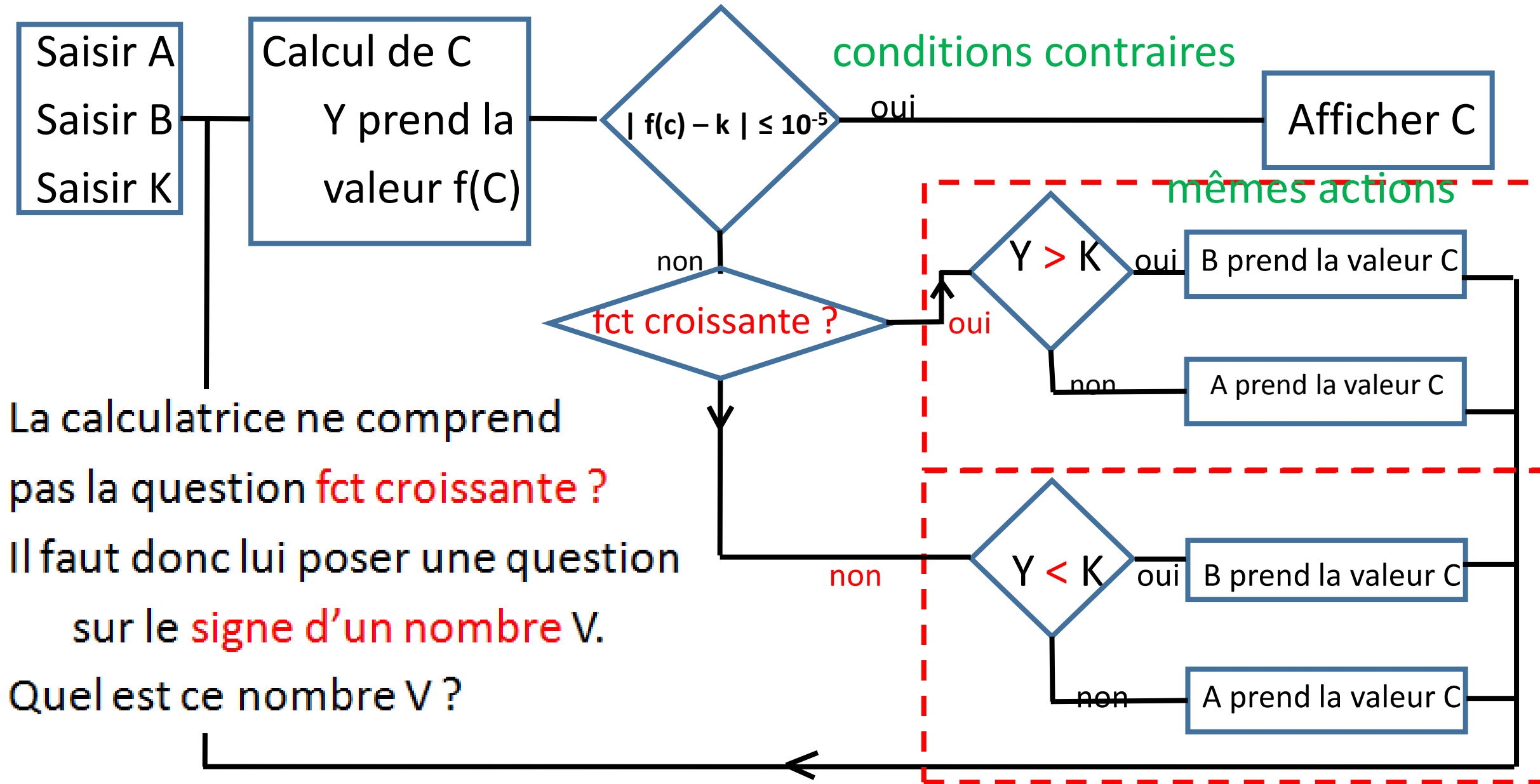
Modification de l'organigramme :



Modification de l'organigramme :



Modification de l'organigramme :



question **fct croissante ?**

remplacée par **signe d'un nombre V ?**

Quel est ce nombre V ?

1^{ère} possibilité : **$V = f'(x)$** d'après le théorème de la monotonie,
mais ...

2^{ème} possibilité : **$V = f(B) - f(A)$**
car ...

question **fct croissante ?**

remplacée par **signe d'un nombre V ?**

Quel est ce nombre V ?

1^{ère} possibilité : **$V = f'(x)$** d'après le théorème de la monotonie,
mais n'existe pas dans le Menu PGM

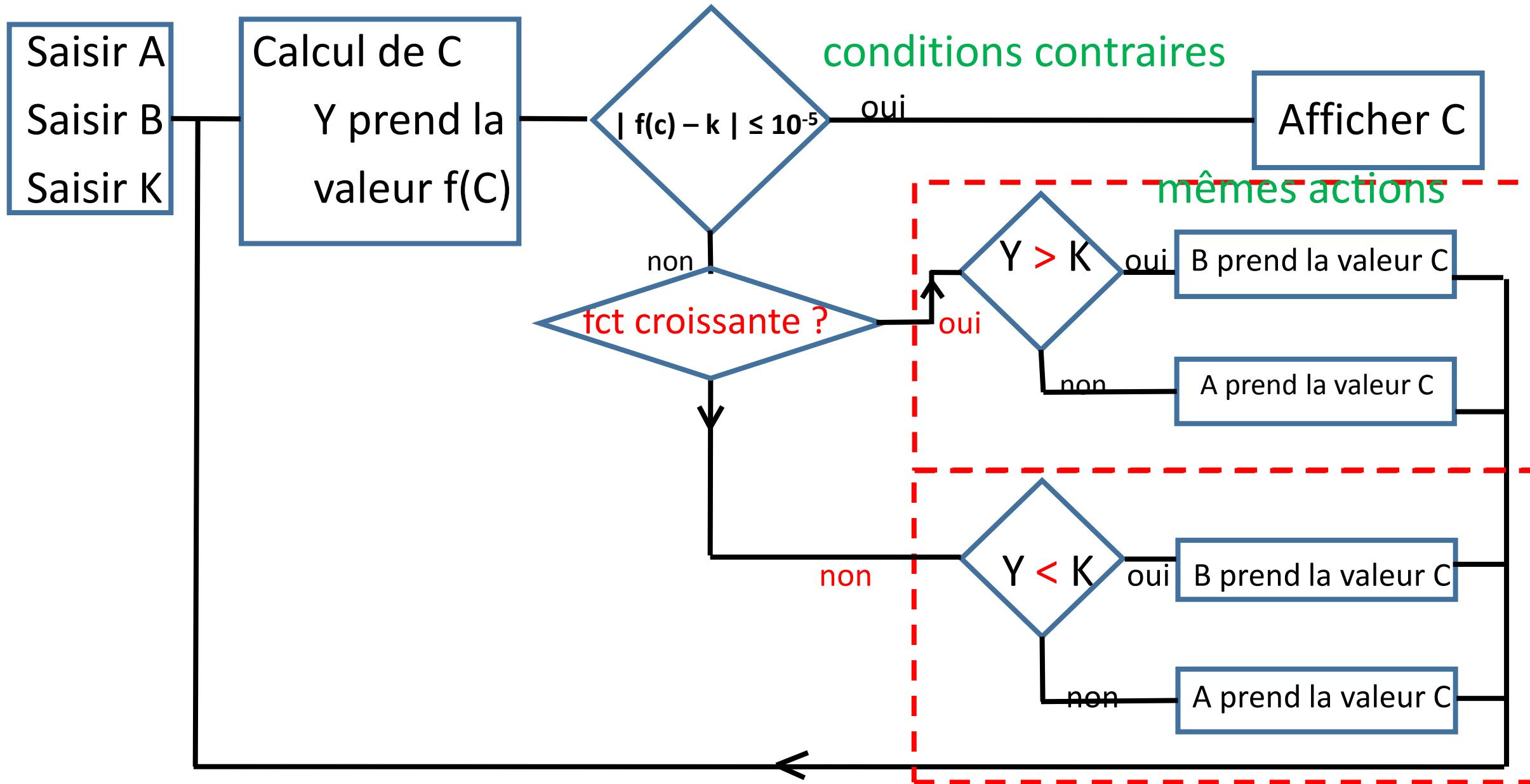
2^{ème} possibilité : **$V = f(B) - f(A)$**

car les antécédents sont ordonnés : $A < B$

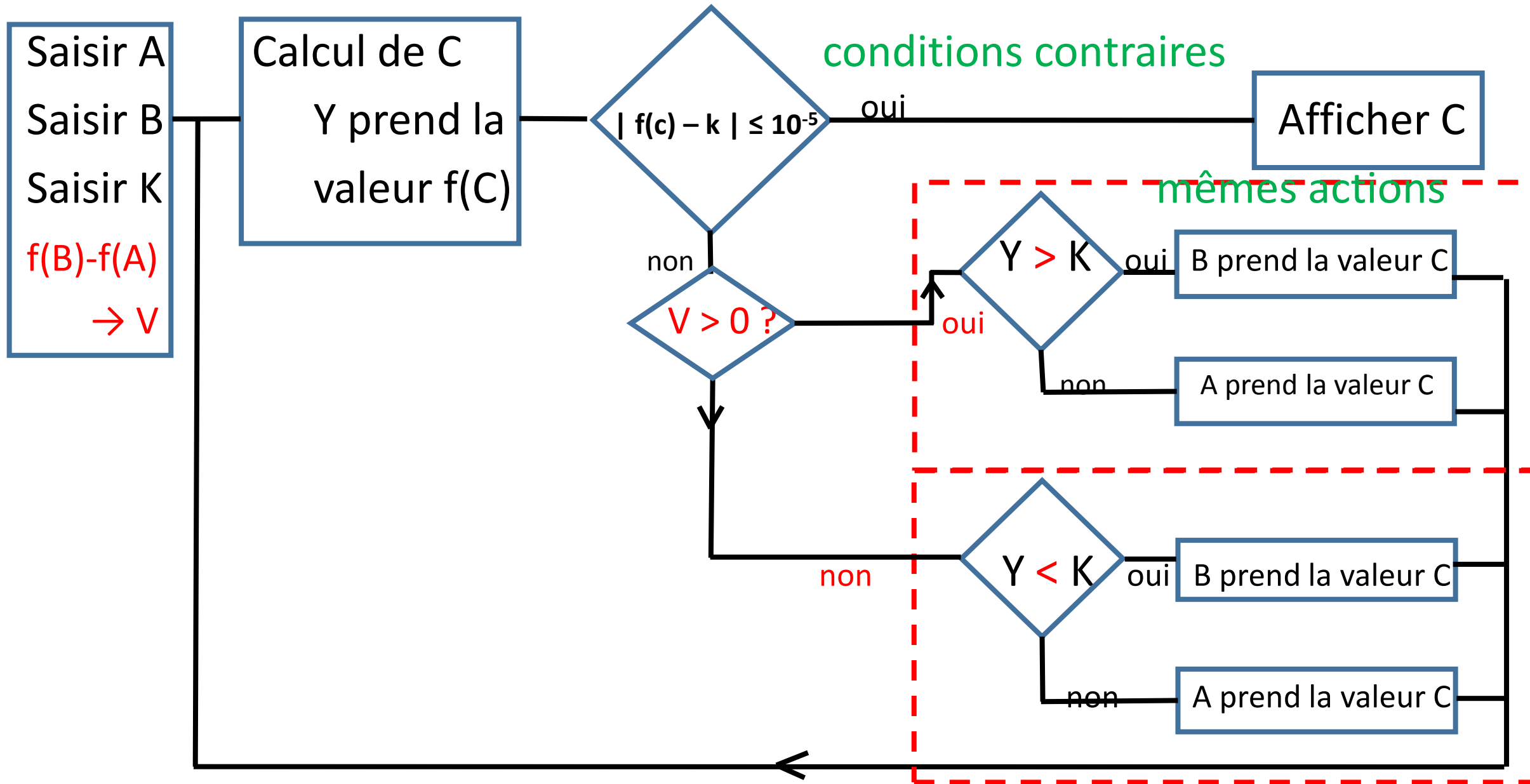
et la fct croissante conserve l'ordre $\Rightarrow f(A) < f(B) \iff f(B) - f(A) > 0$

et la fct **dé**croissante inverse l'ordre $\Rightarrow f(A) > f(B) \iff f(B) - f(A) < 0$

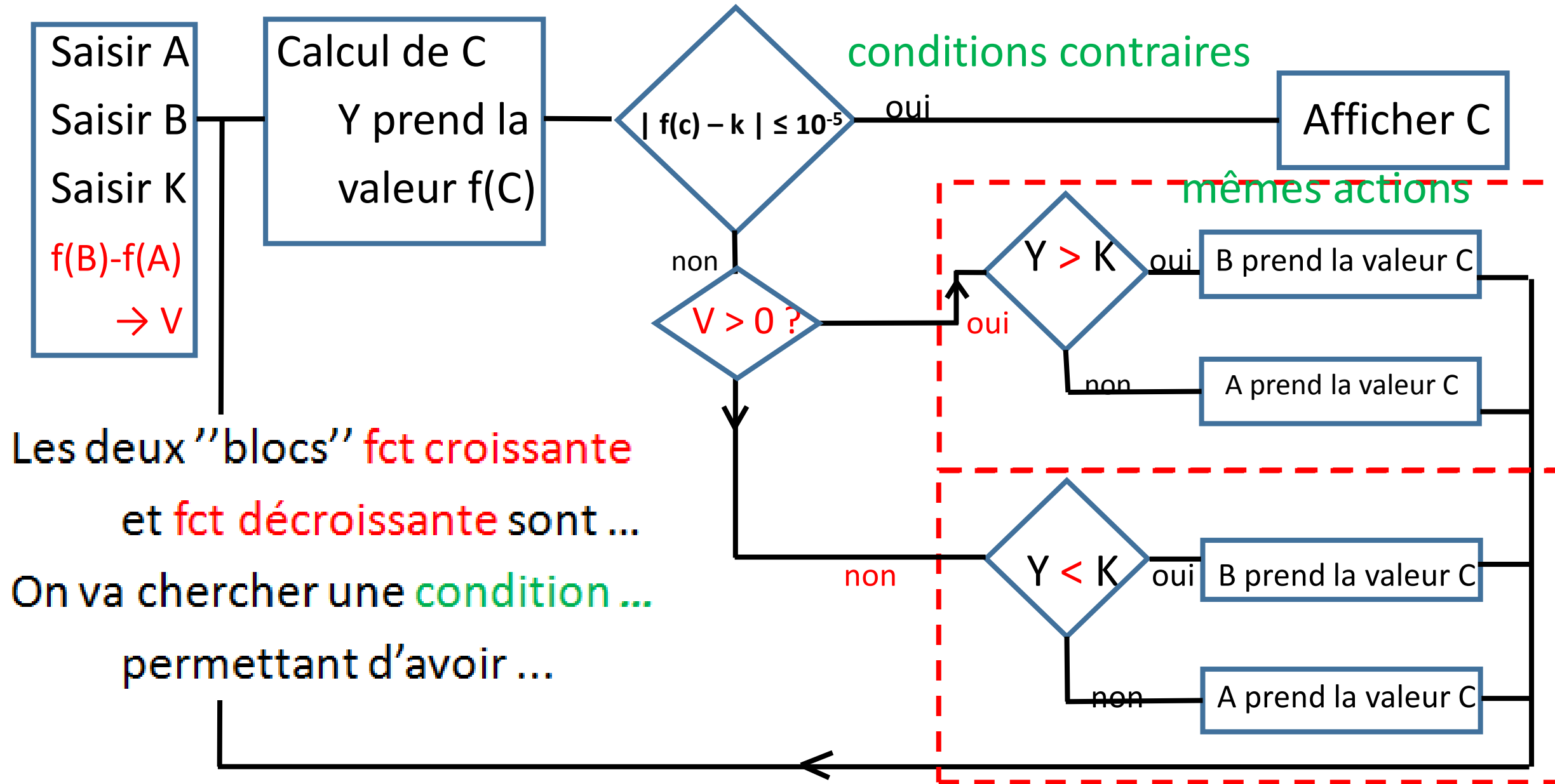
Modification de l'organigramme :



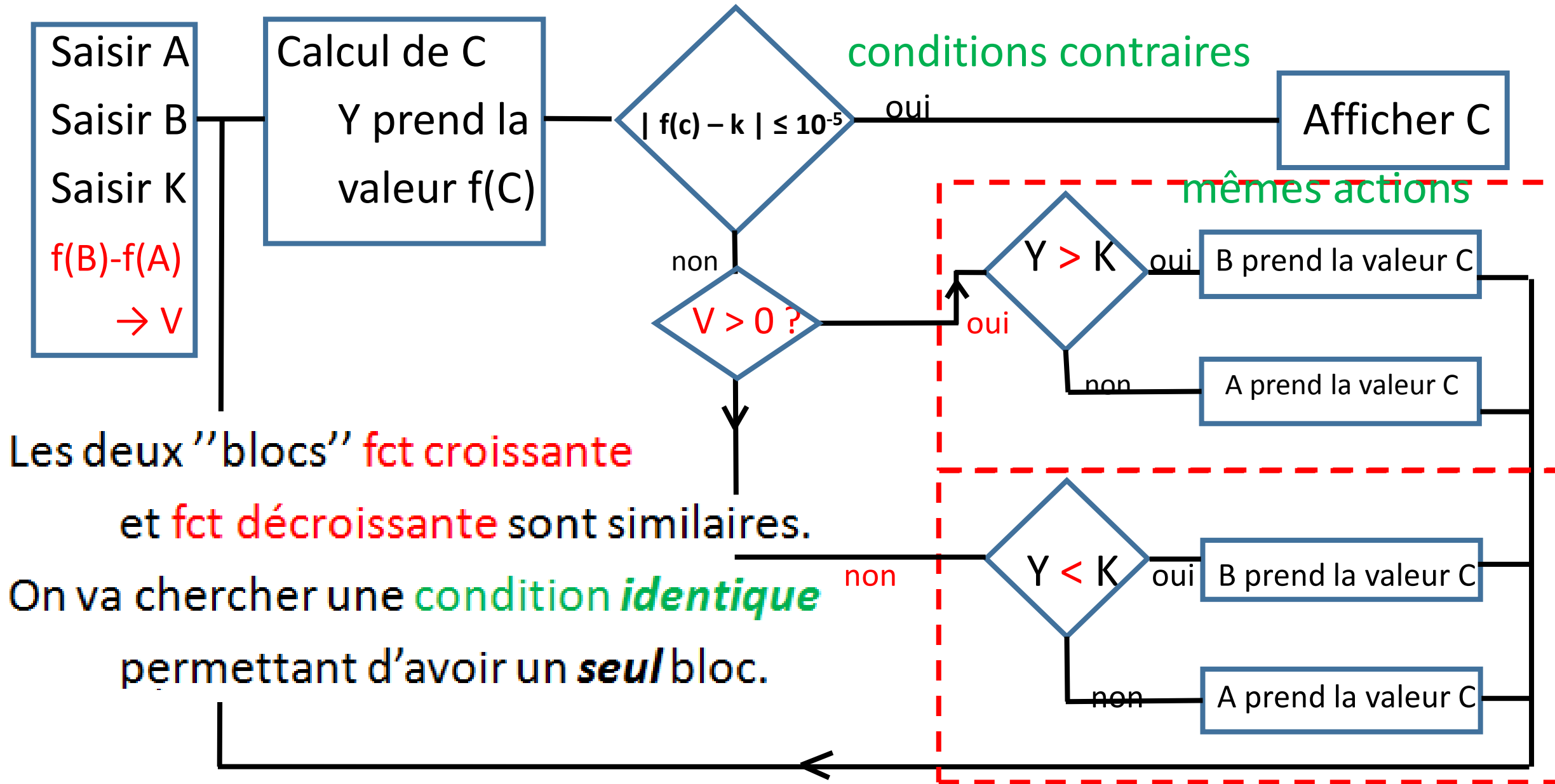
Modification de l'organigramme :



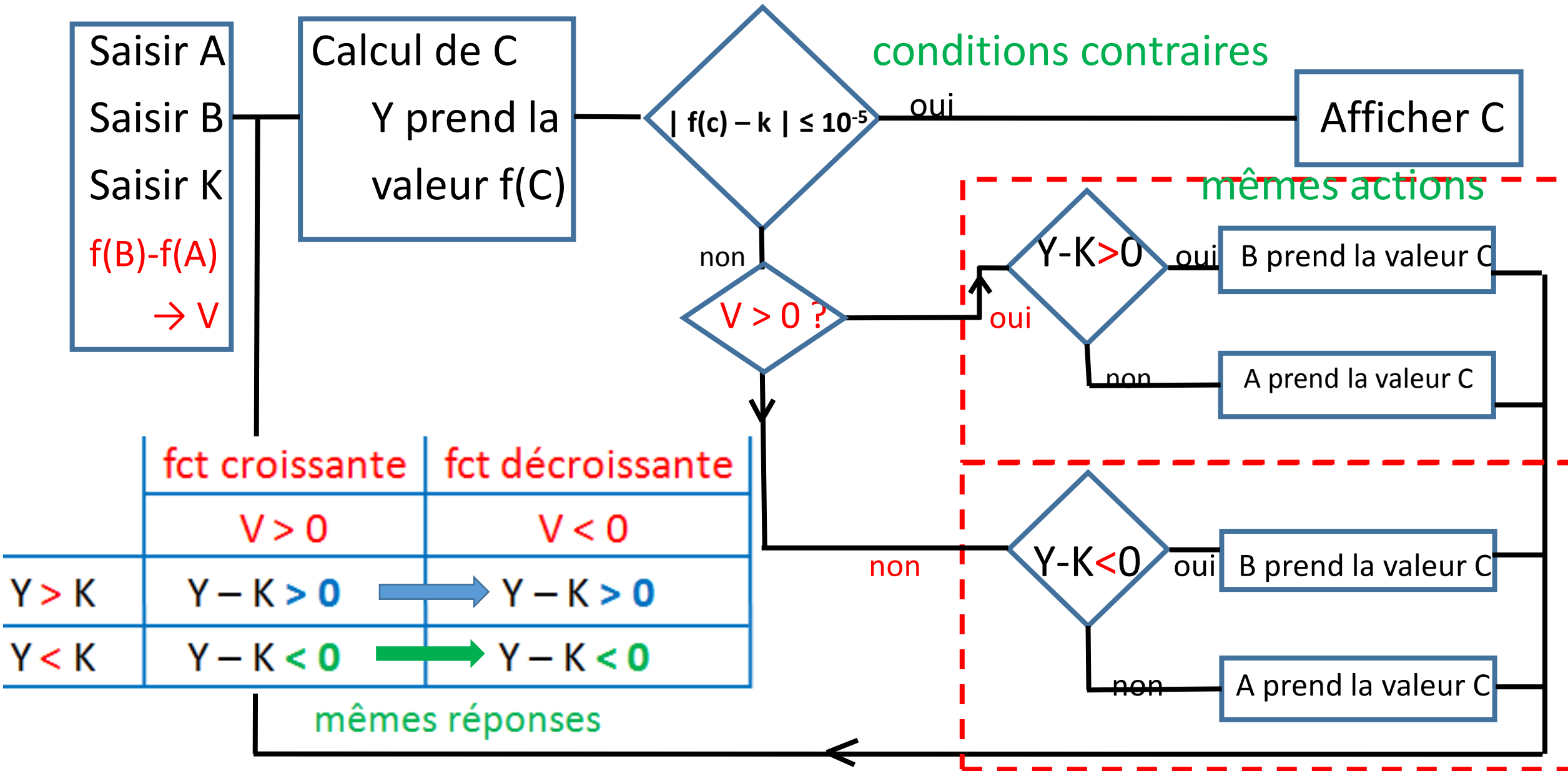
Modification de l'organigramme :



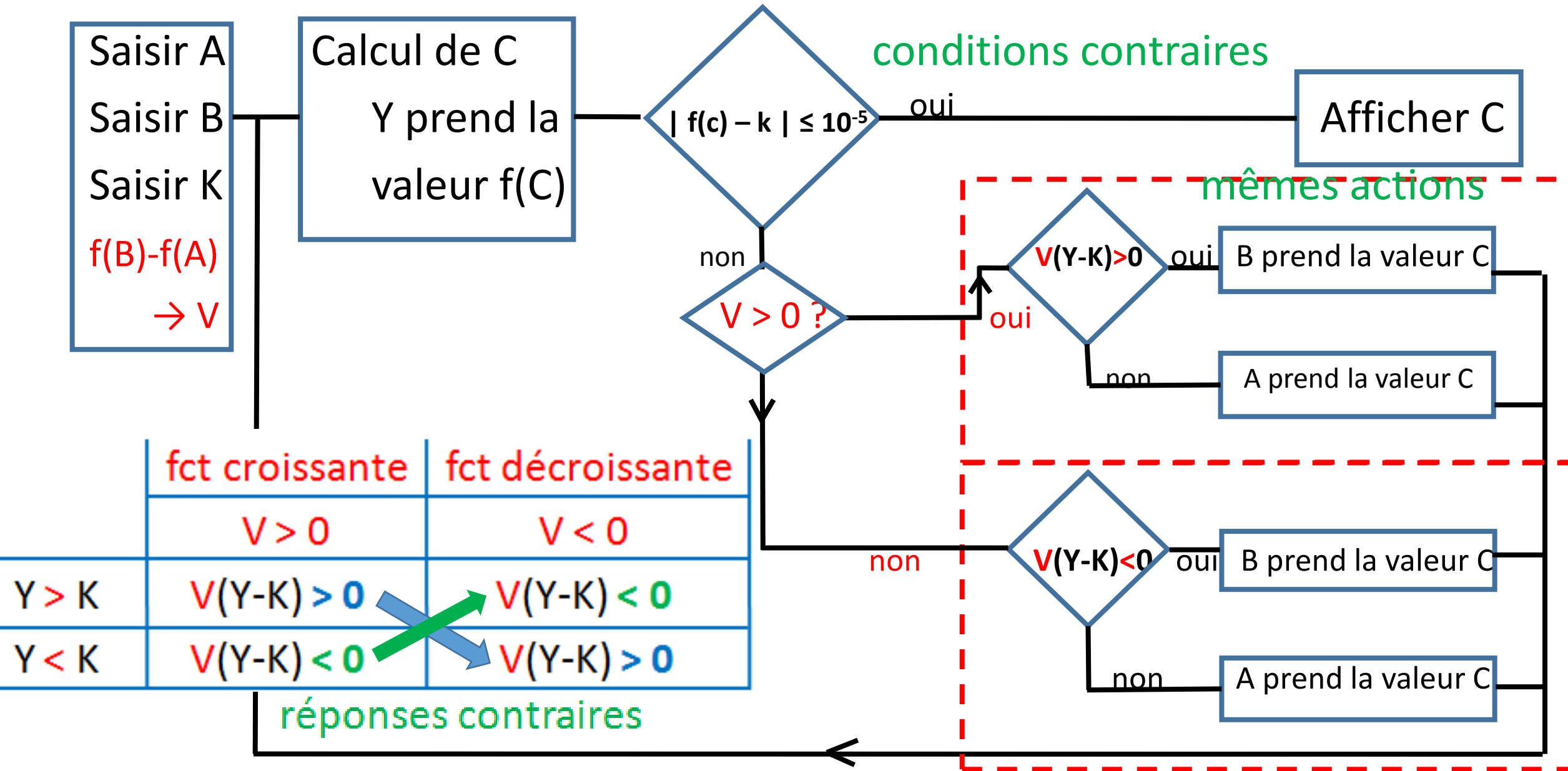
Modification de l'organigramme :



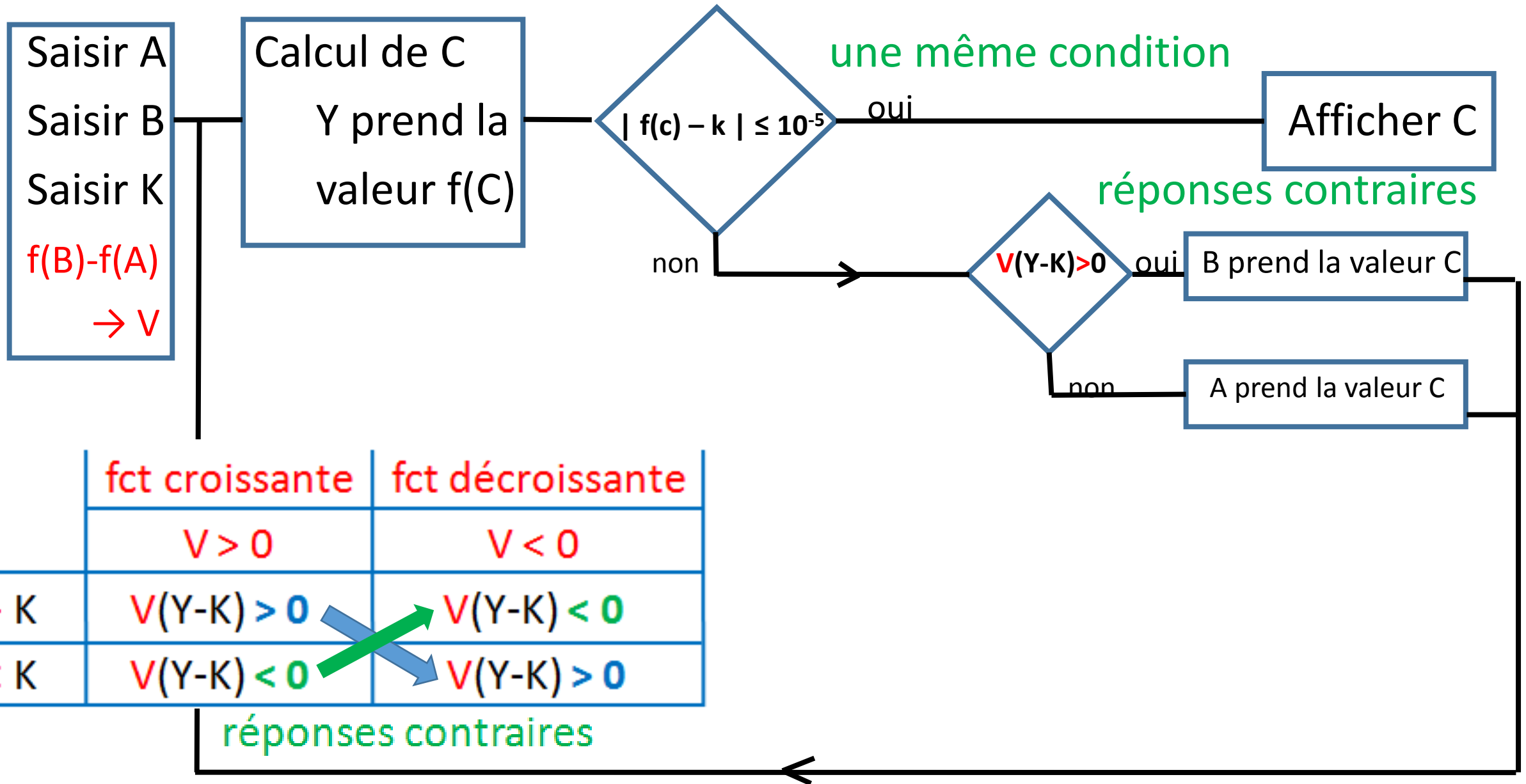
Modification de l'organigramme :



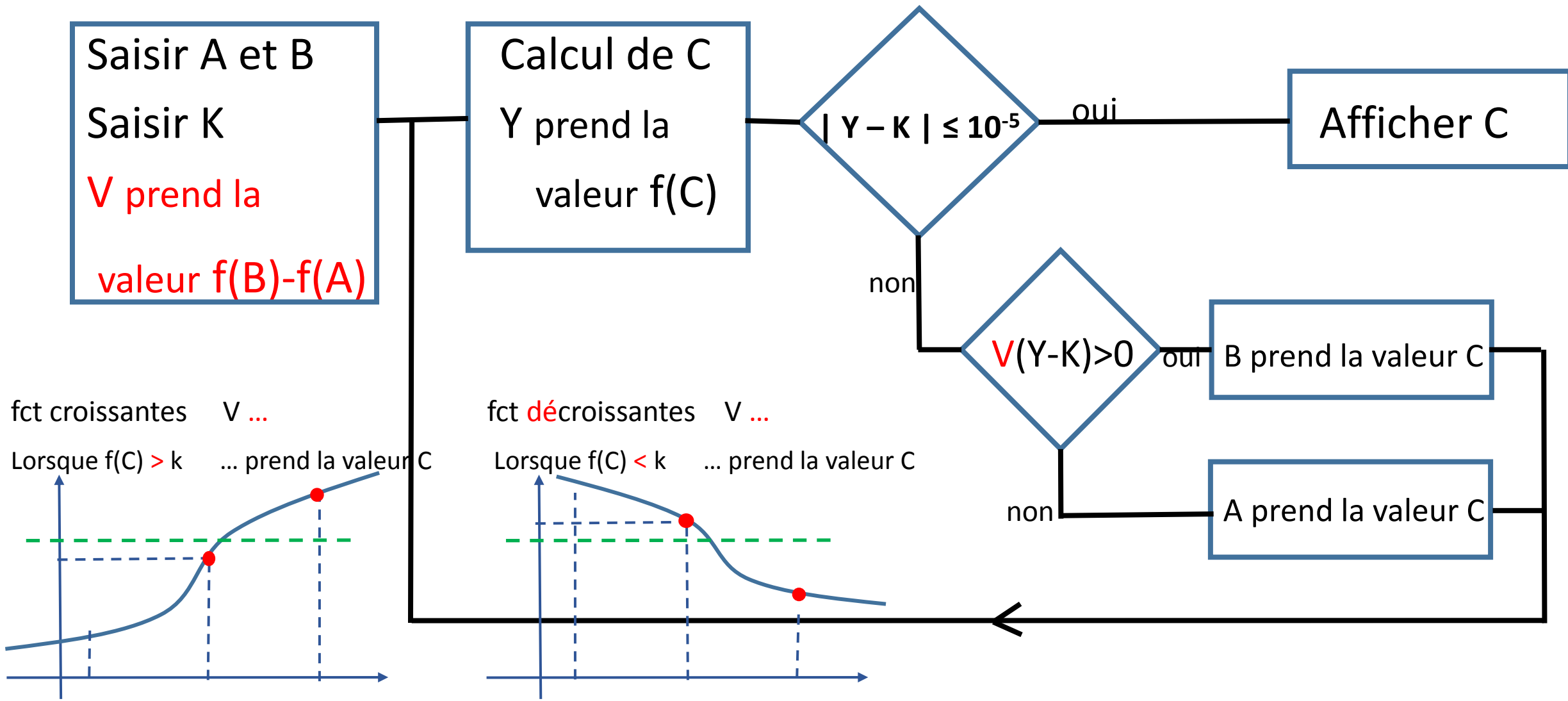
Modification de l'organigramme :



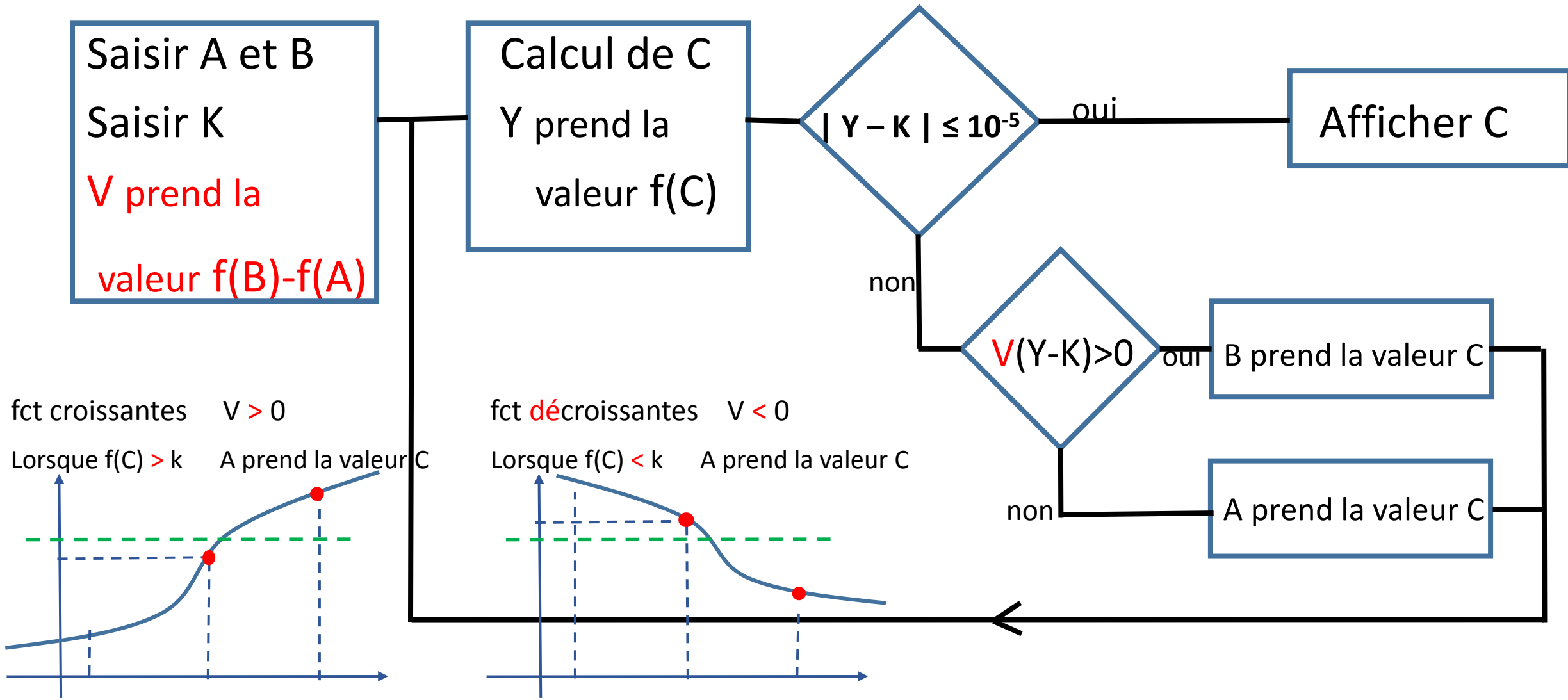
Modification de l'organigramme :



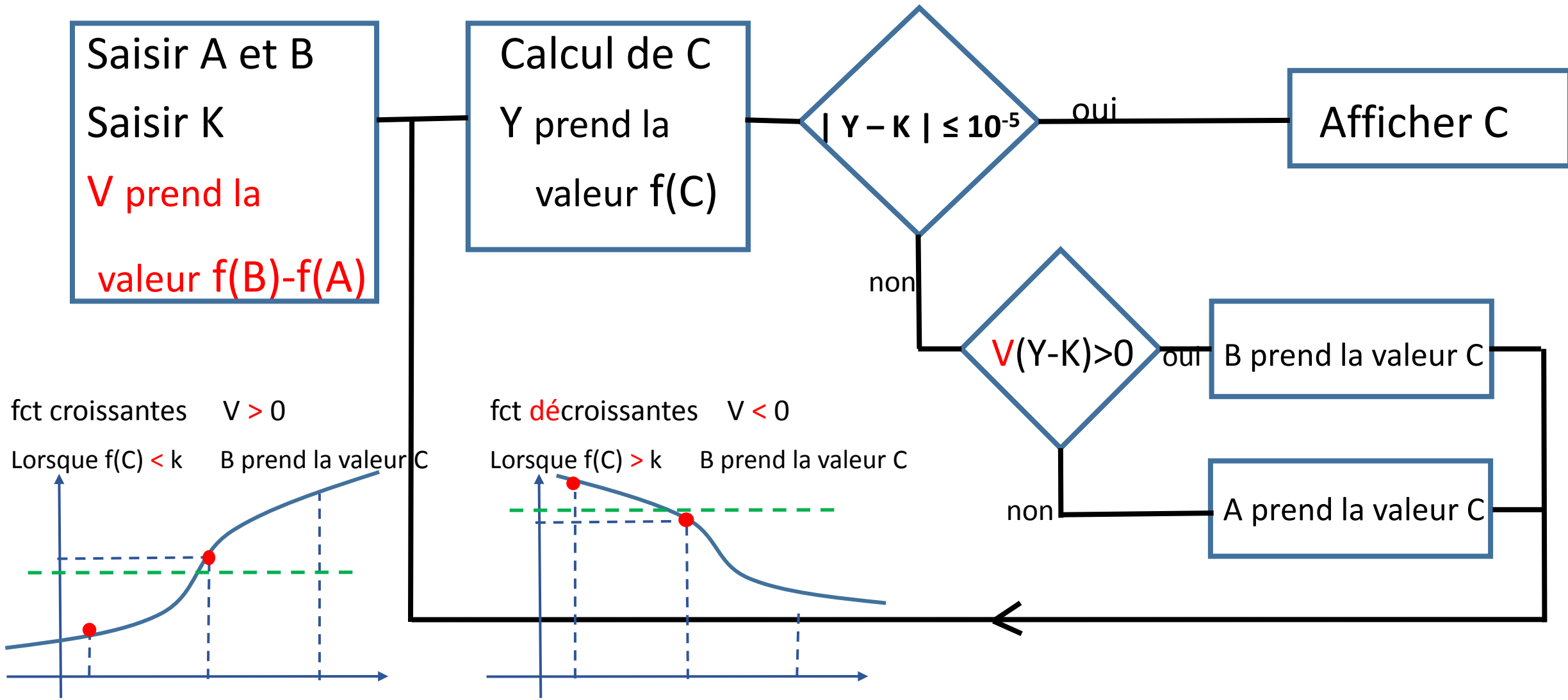
Organigramme **convenant aussi** **pour les monotonies décroissantes :**



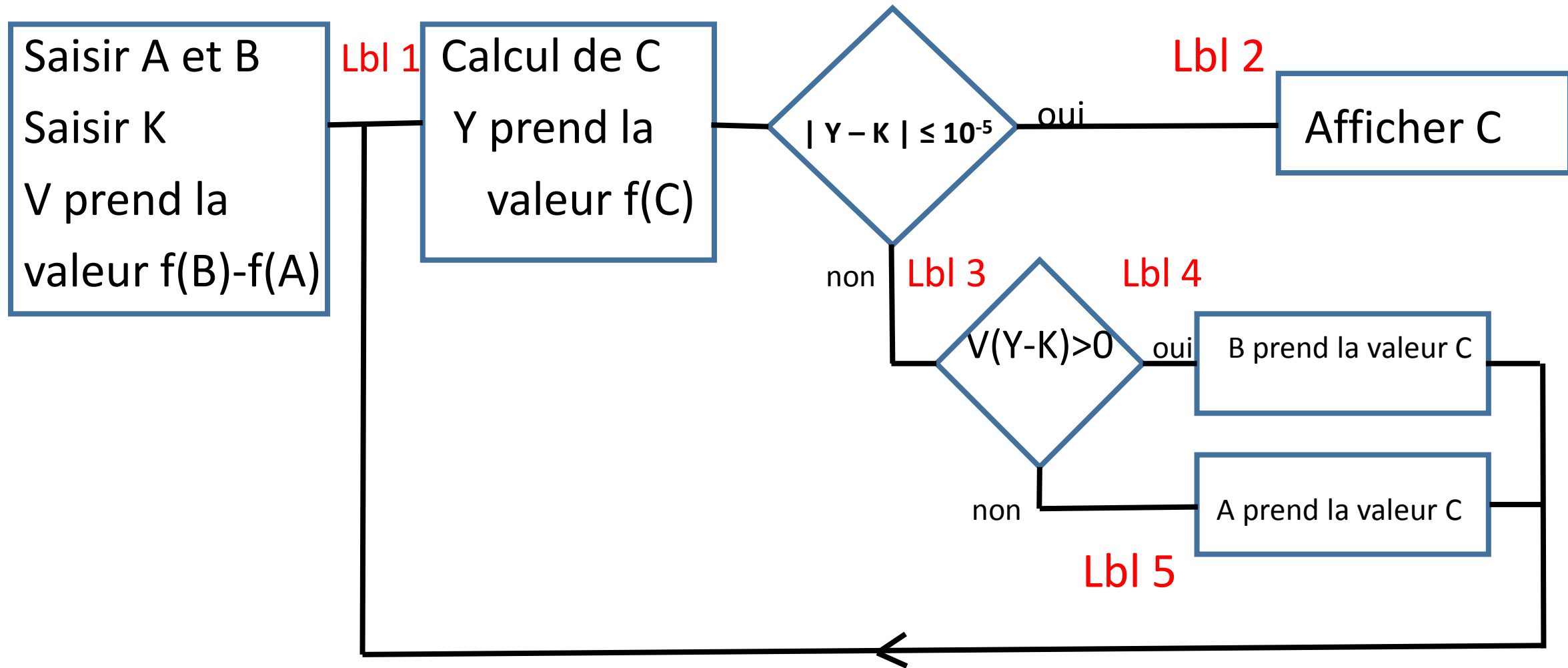
Organigramme **convenant aussi** pour les monotonies **décroissantes** :



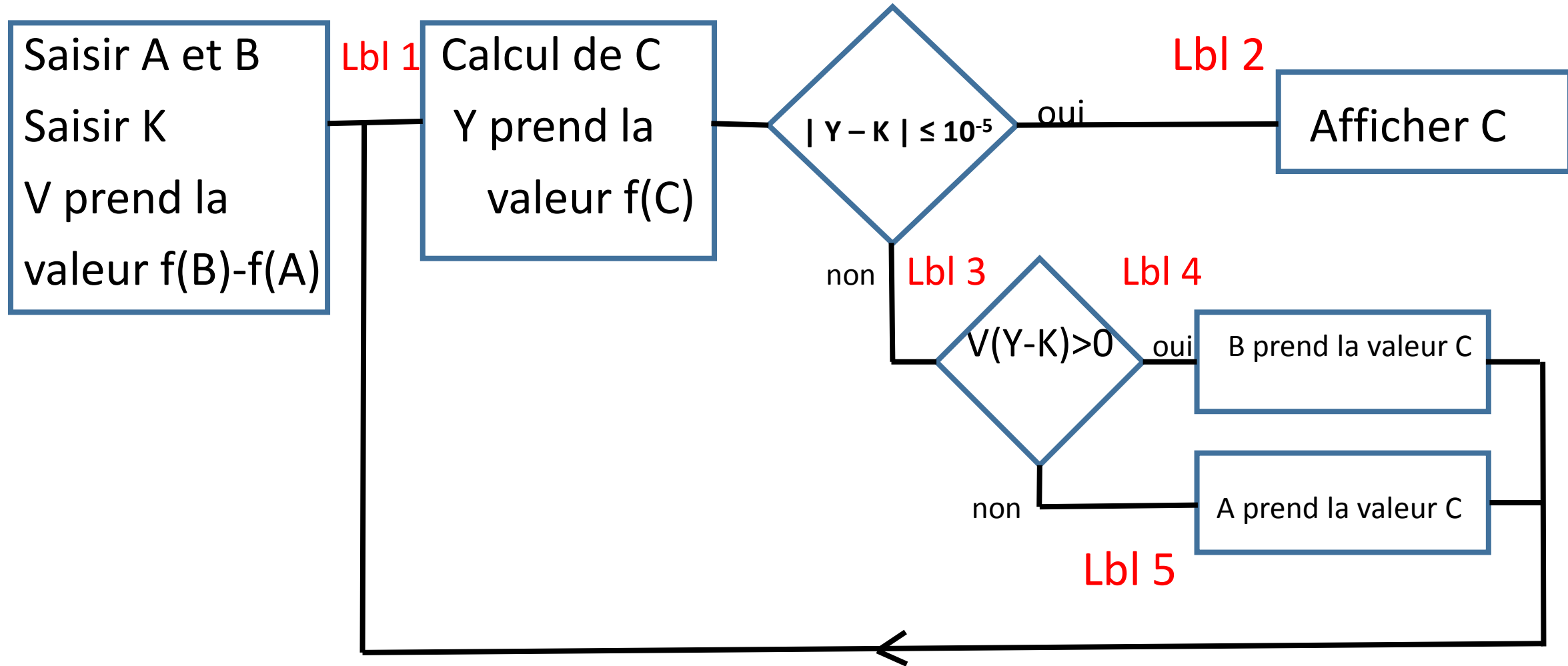
Organigramme **convenant aussi** pour les monotones **décroissantes** :



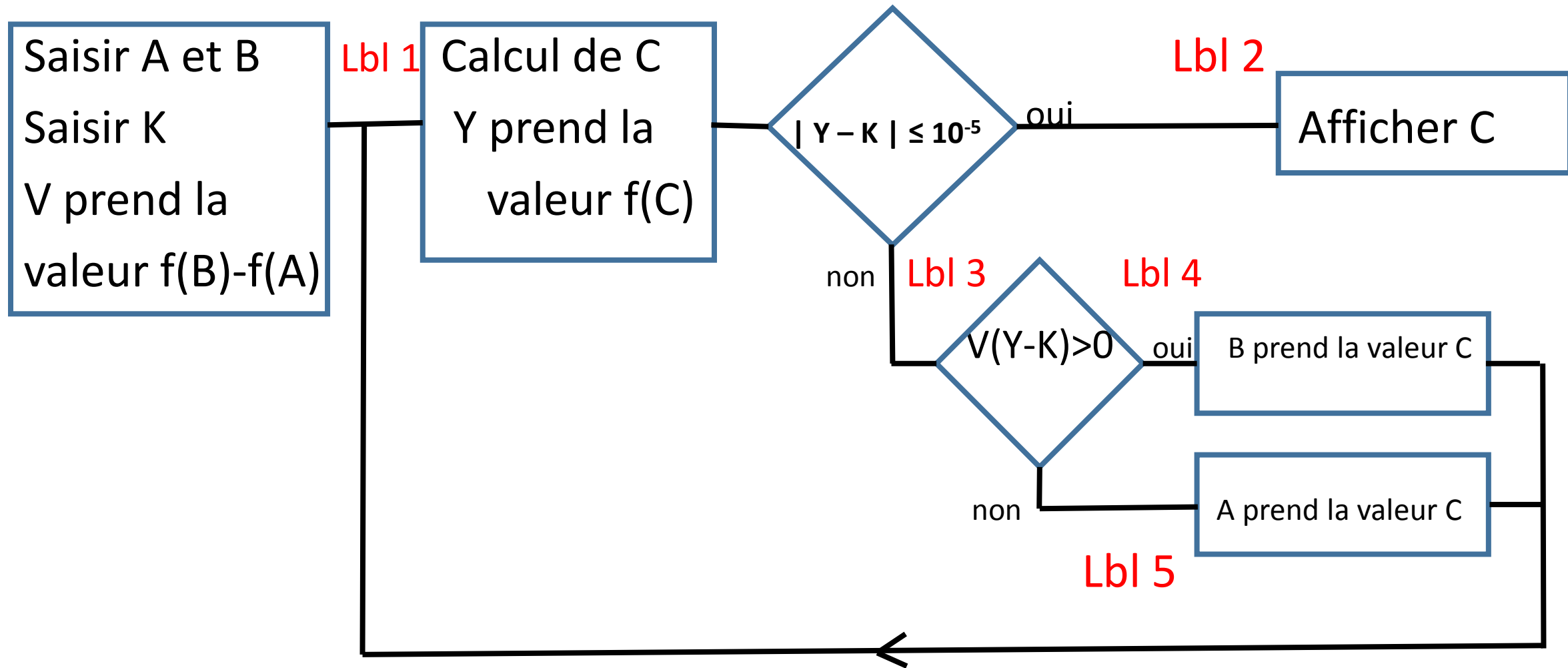
Programme :



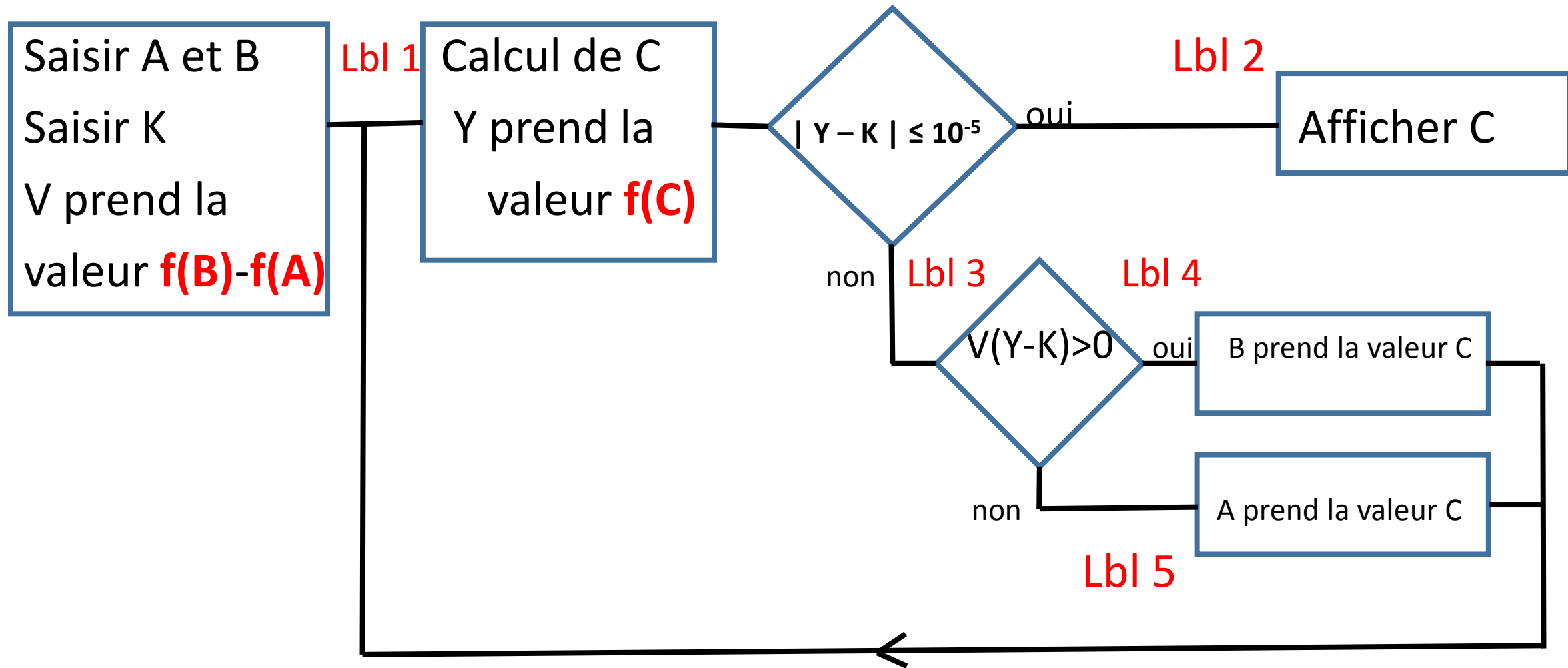
$? \rightarrow A : ? \rightarrow B : ? \rightarrow K : B^2 - A^2 \rightarrow V : \text{Lbl 1} : (A + B) \div 2 \rightarrow C : C^2 \rightarrow Y : \text{If } \text{Abs}(Y - K) \leq 10^{-5} : \text{Then Goto 2} : \text{Else Goto 3} : \text{Lbl 3} : \text{If } V(Y - K) > 0 : \text{Then Goto 4} : \text{Else Goto 5} : \text{Lbl 4} : C \rightarrow B : \text{Goto 1} : \text{Lbl 5} : C \rightarrow A : \text{Goto 1} : \text{Lbl 2} : C \triangleleft$



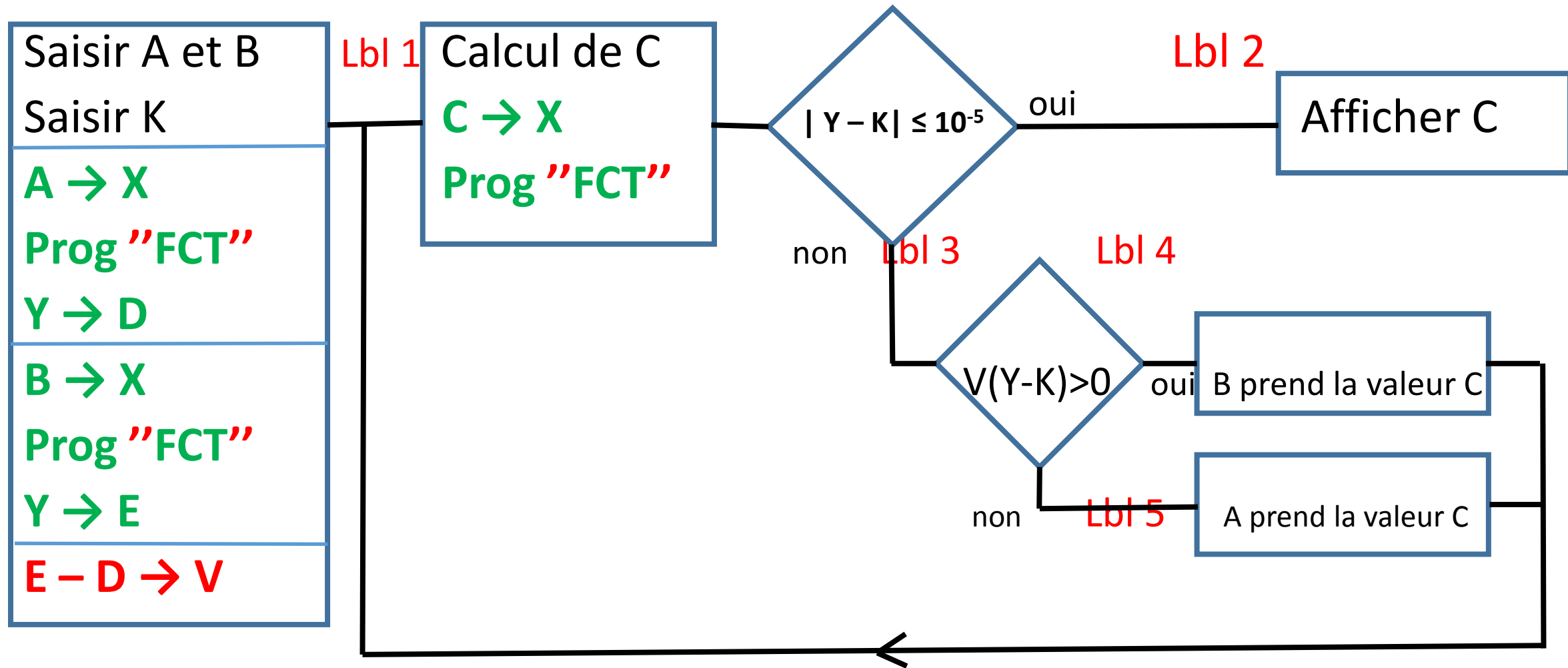
Si la fonction f n'est pas la fct x^2 , mais la fct $x^2+3x-124+\cos(\sin(3\pi+5x))$ nous avons un inconvénient : celui ...



Si la fonction f n'est pas la fct x^2 , mais la fct $x^2+3x-124+\cos(\sin(3\pi+5x))$
nous avons un inconvénient : celui de devoir taper 3 fois l'expression $f(x)$!
Comment éliminer cet inconvénient ?

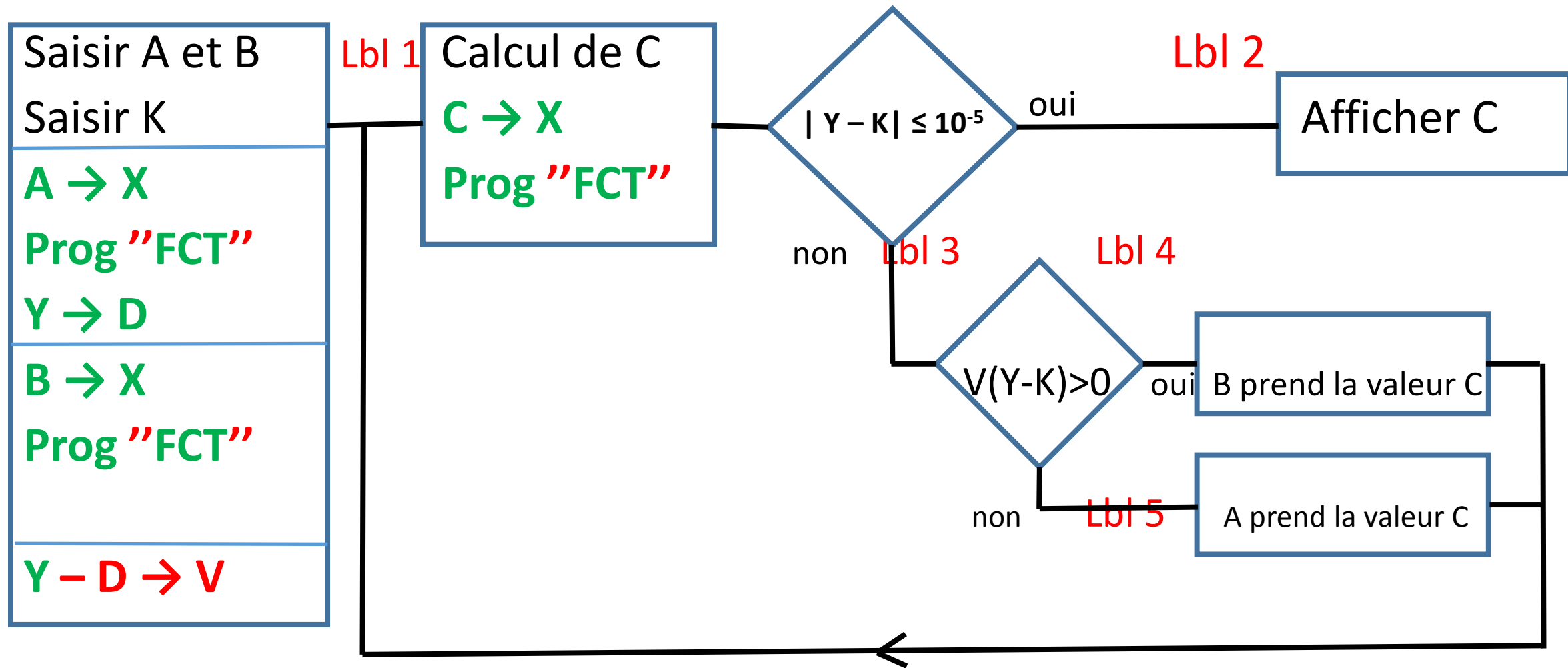


Si la fonction f n'est pas la fct x^2 , mais la fct $x^2+3x-124+\cos(\sin(3\pi+5x))$
 nous avons un inconvénient : celui de devoir taper 3 fois l'expression $f(x)$!
 Comment éliminer cet inconvénient ? En utilisant 3 fois un seul sous-pgm $f(x)$ que je nomme **FCT**.
Prog (sous-pgm) se trouve dans **Shift Pgm** → **CTL**.



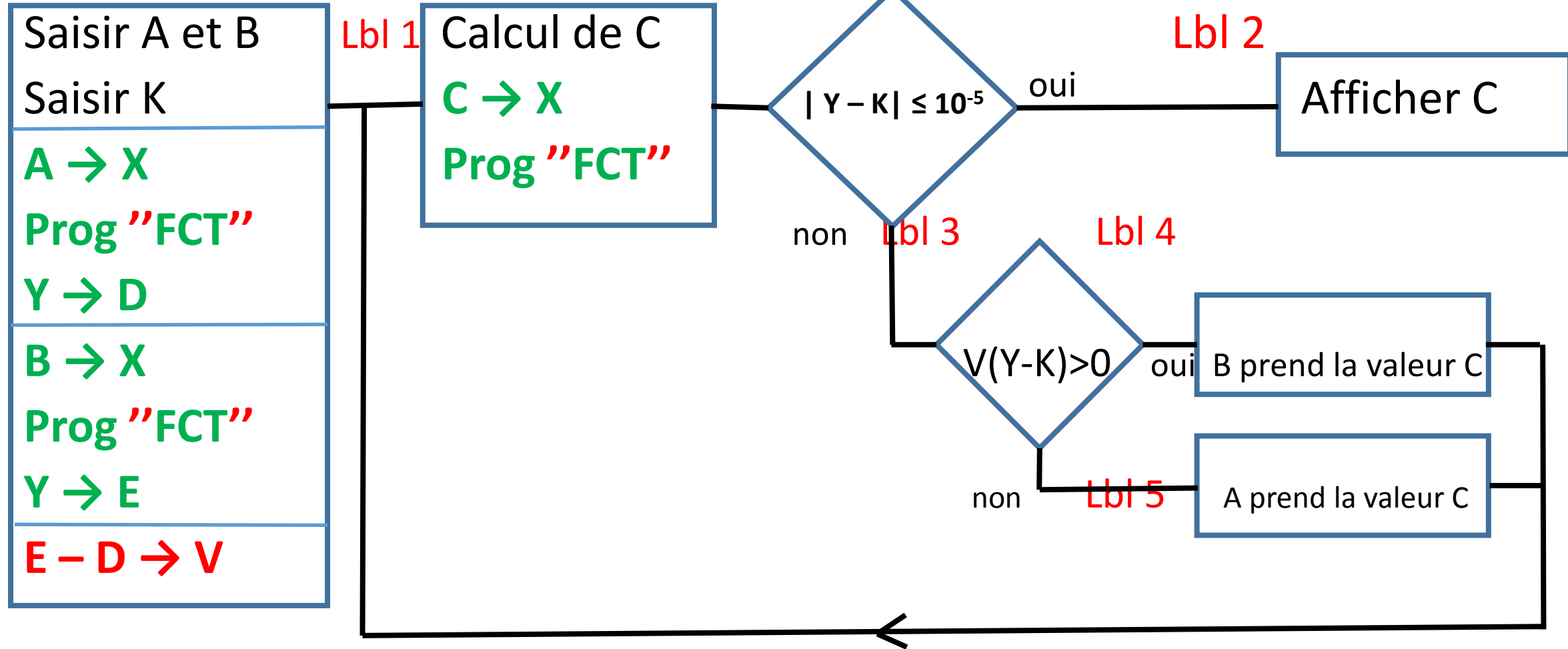
Variante :

on peut économiser l'écriture de $Y \rightarrow E$



$? \rightarrow A : ? \rightarrow B : ? \rightarrow K : A \rightarrow X : \text{Prog "FCT"} : Y \rightarrow D : B \rightarrow X : \text{Prog "FCT"} : Y \rightarrow E$
 $: E - D \rightarrow V : \text{Lbl 1} : (A+B)/2 \rightarrow C : C \rightarrow X : \text{Prog "FCT"} : \text{If Abs}(Y-K) \leq 10^{-5} : \text{Then Goto 2} : \text{Else}$
 $\text{Goto 3} : \text{Lbl 3} : \text{If } V(Y-K) > 0 : \text{Then Goto 4} : \text{Else Goto 5} : \text{Lbl 4} : C \rightarrow B : \text{Goto 1} : \text{Lbl 5} : C \rightarrow A :$
 $\text{Goto 1} : \text{Lbl 2} : C \nabla$

Et pour le programme FCT : $X^2 \rightarrow Y$ Prog se trouve dans Shift Pgm $\rightarrow$ CTL.



On crée donc un 1^{er} programme **DICHOTO** :

? → A : ? → B : ? → K : **A → X : Prog "FCT" : Y → D : B →**
X : Prog "FCT" : Y → E : E - D → V : Lbl 1 : (A+B)/2 → C :
C → X : Prog "FCT" : If Abs(Y - K) ≤ 10⁻⁵ : Then Goto 2 :
Else Goto 3 : **Lbl 3 :** If V(Y-K) > 0 : Then Goto 4 : Else
Goto 5 : **Lbl 4 :** C → B : Goto 1 : **Lbl 5 :** C → A : Goto 1 :
Lbl 2 : C ∇

Prog se trouve dans Shift Pgm puis CTL.

Abs se trouve dans OPTN puis NUM.

Et un 2^{ème} programme **FCT** : $x^2 \rightarrow Y$

(si $f(x) = x^2$! Par ex. si $f(x) = 3x + 2$ on tape $3X + 2 \rightarrow Y$)

Application : déterminez les solutions approchées
(avec 10 chiffres) des équations suivantes sur les
intervalles, et concluez :

$$x^2 = 4 \text{ sur } [0 ; 6]$$

$$x^2 = 4 \text{ sur } [- 6 ; 0]$$

$$x^2 = 2 \text{ sur } [0 ; 3]$$

$$x^2 = 3 \text{ sur } [1 ; 5]$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [0 ; 6]$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [- 4 ; - 1]$$

Application : déterminez les solutions approchées
(avec 10 chiffres) des équations suivantes sur les
intervalles, et concluez :

$$x^2 = 4 \text{ sur } [0 ; 6] \quad x \approx 1,9999998093$$

$$x^2 = 4 \text{ sur } [- 6 ; 0] \quad x \approx - 1,9999998093$$

$$x^2 = 2 \text{ sur } [0 ; 3] \quad x \approx 1,414215088$$

$$x^2 = 3 \text{ sur } [1 ; 5] \quad x \approx 1,732048035$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [0 ; 6] \quad x \approx 3$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [- 4 ; - 1] \quad x \approx - 3,0000000954$$

Application : déterminez les solutions approchées
(avec 10 chiffres) des équations suivantes sur les
intervalles, et concluez :

$$x^2 = 4 \text{ sur } [0 ; 6] \quad x \approx 1,9999998093 \quad \text{au lieu de } x = 2$$

$$x^2 = 4 \text{ sur } [- 6 ; 0] \quad x \approx - 1,9999998093 \quad x = - 2$$

$$x^2 = 2 \text{ sur } [0 ; 3] \quad x \approx 1,414215088 \quad x = \sqrt{2}$$

$$x^2 = 3 \text{ sur } [1 ; 5] \quad x \approx 1,732048035 \quad x = \sqrt{3}$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [0 ; 6] \quad x \approx 3 \quad x = 3$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [- 4 ; - 1] \quad x \approx - 3,0000000954 \quad x = - 3$$

Application : déterminez les solutions approchées
(avec 10 chiffres) des équations suivantes sur les
intervalles, et concluez :

$$x^2 = 4 \text{ sur } [0 ; 6] \quad x \approx 1,9999998093 \quad \text{au lieu de } x = 2$$

$$x^2 = 4 \text{ sur } [- 6 ; 0] \quad x \approx - 1,9999998093 \quad x = - 2$$

$$x^2 = 2 \text{ sur } [0 ; 3] \quad x \approx 1,414215088 \quad x = \sqrt{2}$$

$$x^2 = 3 \text{ sur } [1 ; 5] \quad x \approx 1,732048035 \quad x = \sqrt{3}$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [0 ; 6] \quad x = 3 \text{ le 1}^{\text{er}} \text{ milieu C donne } f(3) = 9 \quad x = 3$$

$$x^2 = 9 \text{ sur } [- 4 ; - 1] \quad x \approx - 3,0000000954 \quad x = - 3$$