Exercice 7 :

Toute masse M de corps radioactif perd de sa masse en fonction du temps. $M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$ où λ est une constante dépendant du corps et t le temps en années.

1°) On désigne par T la demi-vie du corps radioactif : c'est le temps au bout duquel il a perdu la moitié de sa masse. Exprimez λ en fonction de T.

2°) Exprimez $M(t + T)$ en fonction de $M(t)$ et commentez votre réponse.

3°) La demi-vie du radium est de 1622 ans. Au bout de combien de temps aura-t-il perdu 10% de sa masse ?

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

1°) On désigne par T la demi-vie du corps radioactif : c'est le temps au bout duquel il a perdu la moitié de sa masse. Exprimez λ en fonction de T.

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

$M(T) = 0{,}5\, M_0 \Leftrightarrow$ …

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

1°) On désigne par T la demi-vie du corps radioactif : c'est le temps au bout duquel il a perdu la moitié de sa masse. Exprimez λ en fonction de T.

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

$M(T) = 0{,}5\, M_0 \iff M_0\, e^{-\lambda T} = 0{,}5\, M_0$

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

1°) On désigne par T la demi-vie du corps radioactif : c'est le temps au bout duquel il a perdu la moitié de sa masse. Exprimez λ en fonction de T.

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

$M(T) = 0{,}5\, M_0 \Leftrightarrow M_0\, e^{-\lambda T} = 0{,}5\, M_0$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda T} = 0{,}5$

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

1°) On désigne par T la demi-vie du corps radioactif : c'est le temps au bout duquel il a perdu la moitié de sa masse. Exprimez λ en fonction de T.

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

$M(T) = 0{,}5\, M_0 \Leftrightarrow M_0\, e^{-\lambda T} = 0{,}5\, M_0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-\lambda T} = 0{,}5}_{\text{antécédents}} \Leftrightarrow \underbrace{\ln(e^{-\lambda T}) = \ln(0{,}5)}_{\text{images}}$

car la fonction ln est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

1°) On désigne par T la demi-vie du corps radioactif : c'est le temps au bout duquel il a perdu la moitié de sa masse. Exprimez λ en fonction de T.

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

$M(T) = 0{,}5\, M_0 \iff M_0\, e^{-\lambda T} = 0{,}5\, M_0$

$\iff \underbrace{e^{-\lambda T} = 0{,}5}_{\textit{antécédents}} \iff \underbrace{\ln(e^{-\lambda T}) = \ln(0{,}5)}_{\textit{images}}$

car la fonction ln est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\iff -\lambda T \ln(e) = \ln(0{,}5)$

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

1°) On désigne par T la demi-vie du corps radioactif : c’est le temps au bout duquel il a perdu la moitié de sa masse. Exprimez λ en fonction de T.

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

$M(T) = 0{,}5\, M_0 \Leftrightarrow M_0\, e^{-\lambda T} = 0{,}5\, M_0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-\lambda T} = 0{,}5}_{\text{antécédents}} \Leftrightarrow \underbrace{\ln(e^{-\lambda T}) = \ln(0{,}5)}_{\text{images}}$

car la fonction ln est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$\Leftrightarrow -\lambda T \ln(e) = \ln(0{,}5) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0{,}5)}{-T\ln(e)}$$

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

1°) On désigne par T la demi-vie du corps radioactif : c'est le temps au bout duquel il a perdu la moitié de sa masse. Exprimez λ en fonction de T.

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

$M(T) = 0{,}5\, M_0 \Leftrightarrow M_0\, e^{-\lambda T} = 0{,}5\, M_0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-\lambda T} = 0{,}5}_{\text{antécédents}} \Leftrightarrow \underbrace{\ln(e^{-\lambda T}) = \ln(0{,}5)}_{\text{images}}$

car la fonction ln est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$\Leftrightarrow -\lambda T \ln(e) = \ln(0{,}5) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0{,}5)}{-T\ln(e)} = \frac{\ln(0{,}5)}{-T}$$

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

2°) Exprimez $M(t + T)$ en fonction de $M(t)$.

$M(t + T) = M_0\, e^{-\lambda(t + T)}$

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

2°) Exprimez $M(t + T)$ en fonction de $M(t)$.

$$M(t + T) = M_0\, e^{-\lambda(t + T)} = M_0\, e^{-\lambda t - \lambda T} = M_0\, e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda T}$$

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

2°) Exprimez $M(t + T)$ en fonction de $M(t)$.

$M(t + T) = M_0\, e^{-\lambda(t + T)} = M_0\, e^{-\lambda t - \lambda T} = M_0\, e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda T}$

$M(T) = 0{,}5\, M_0 = M_0\, e^{-\lambda T}$ *voir question précédente*

$\Leftrightarrow 0{,}5 = e^{-\lambda T}$

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$

2°) Exprimez $M(t + T)$ en fonction de $M(t)$.

$$M(t + T) = M_0\, e^{-\lambda(t + T)} = M_0\, e^{-\lambda t - \lambda T} = M_0\, e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda T}$$

$M(T) = 0{,}5\, M_0 = M_0\, e^{-\lambda T}$ *voir question précédente*

$\Leftrightarrow 0{,}5 = e^{-\lambda T}$

$$M(t + T) = M_0\, e^{-\lambda t} \times 0{,}5$$

$M(t) = M_0 \, e^{-\lambda t}$

2°) Exprimez $M(t + T)$ en fonction de $M(t)$.

$$M(t + T) = M_0 \, e^{-\lambda(t + T)} = M_0 \, e^{-\lambda t - \lambda T} = M_0 \, e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda T}$$

$M(T) = 0{,}5 \, M_0 = M_0 \, e^{-\lambda T}$ *voir question précédente*

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}5 = e^{-\lambda T}$$

$$M(t + T) = M_0 \, e^{-\lambda t} \times 0{,}5 = 0{,}5 \times M(t)$$

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$ 2°) Exprimez $M(t + T)$ en fonction de $M(t)$.

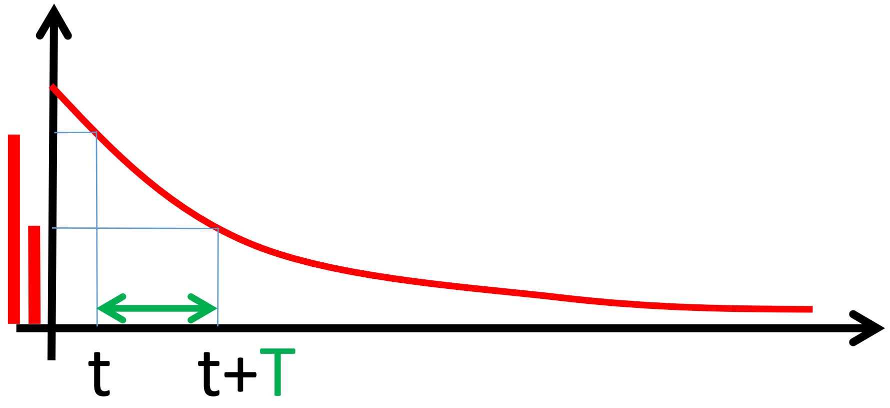
$$M(t + T) = M_0\, e^{-\lambda(t + T)} = M_0\, e^{-\lambda t - \lambda T} = M_0\, e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda T}$$

$M(T) = 0{,}5\, M_0 = M_0\, e^{-\lambda T}$ *voir question précédente*

$$\Leftrightarrow 0{,}5 = e^{-\lambda T}$$

$$M(t + T) = M_0\, e^{-\lambda t} \times 0{,}5 = 0{,}5 \times M(t)$$

Commentez votre réponse. $M(t + T) = 0{,}5 \times M(t)$



$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$ 2°) Exprimez $M(t + T)$ en fonction de $M(t)$.

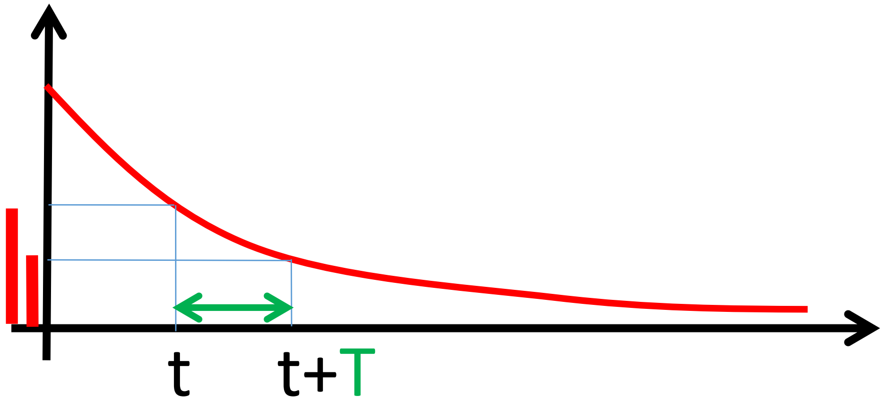
$$M(t + T) = M_0\, e^{-\lambda(t + T)} = M_0\, e^{-\lambda t - \lambda T} = M_0\, e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda T}$$

$M(T) = 0{,}5\, M_0 = M_0\, e^{-\lambda T}$ *voir question précédente*

$$\Leftrightarrow 0{,}5 = e^{-\lambda T}$$

$$M(t + T) = M_0\, e^{-\lambda t} \times 0{,}5 = 0{,}5 \times M(t)$$

Commentez votre réponse. $M(t + T) = 0{,}5 \times M(t)$



$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t}$ **2°)** Exprimez $M(t + T)$ en fonction de $M(t)$.

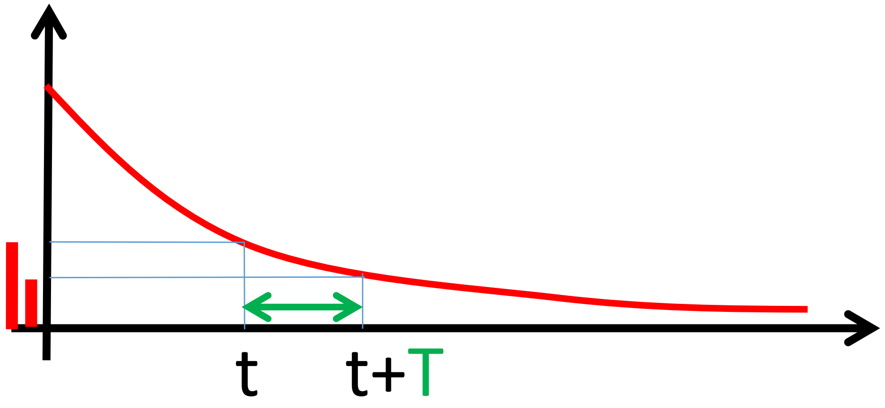
$$M(t + T) = M_0\, e^{-\lambda(t + T)} = M_0\, e^{-\lambda t - \lambda T} = M_0\, e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda T}$$

$M(T) = 0{,}5\, M_0 = M_0\, e^{-\lambda T}$ *voir question précédente*

$$\Leftrightarrow 0{,}5 = e^{-\lambda T}$$

$$M(t + T) = M_0\, e^{-\lambda t} \times 0{,}5 = 0{,}5 \times M(t)$$

Commentez votre réponse. $M(t + T) = 0{,}5 \times M(t)$



Quel que soit le temps t (pas forcément 0)

les images $M(t)$ et $M(t + T)$ varient,

mais le rapport $M(t + T) / M(t)$

est constant.

3°) La demi-vie du radium est de 1622 ans. Au bout de combien de temps aura-t-il perdu 10% de sa masse ?

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t} = 90\%\, M_0$

3°) La demi-vie du radium est de 1622 ans. Au bout de combien de temps aura-t-il perdu 10% de sa masse ?

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t} = 90\%\, M_0$

3°) La demi-vie du radium est de 1622 ans. Au bout de combien de temps aura-t-il perdu 10% de sa masse ?

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t} = 90\%\, M_0 \Longleftrightarrow e^{-\lambda t} = 90\%$

3°) La demi-vie du radium est de 1622 ans. Au bout de combien de temps aura-t-il perdu 10% de sa masse ?

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t} = 90\%\, M_0 \iff \underbrace{e^{-\lambda t} = 90\%}_{\textit{antécédents}}$

$\iff \underbrace{\ln(e^{-\lambda t}) = \ln(0{,}9)}_{\textit{images}}$

car la fonction ln est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

3°) La demi-vie du radium est de 1622 ans. Au bout de combien de temps aura-t-il perdu 10% de sa masse ?

$M(t) = M_0 \, e^{-\lambda t} = 90\% \, M_0 \iff \underbrace{e^{-\lambda t} = 90\%}_{\text{antécédents}}$

$\iff \ln\left(e^{-\lambda t} \right) \underset{\text{images}}{=} \ln(0,9)$

car la fonction ln est strictement croissante sur $] \, 0 \, ; + \infty \, [$

$\iff -\lambda t \ \ln(e) = \ln(0,9)$

3°) La demi-vie du radium est de 1622 ans. Au bout de combien de temps aura-t-il perdu 10% de sa masse ?

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t} = 90\%\, M_0 \iff e^{-\lambda t} = 90\%$

antécédents

$\iff \ln(e^{-\lambda t}) = \ln(0{,}9)$

images

car la fonction ln est strictement croissante sur $]\, 0\, ;\, +\infty\, [$

$$\iff -\lambda t\, \ln(e) = \ln(0{,}9) \iff t = \frac{\ln(0{,}9)}{-\lambda \ln(e)} = \frac{\ln(0{,}9)}{-\lambda}$$

Mais on ne connaît pas le λ du radium !

3°) La demi-vie du radium est de 1622 ans. Au bout de combien de temps aura-t-il perdu 10% de sa masse ?

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t} = 90\%\, M_0 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 90\%$

antécédents

$\Leftrightarrow \ln(e^{-\lambda t}) = \ln(0{,}9)$

images

car la fonction ln est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$\Leftrightarrow -\lambda t \ \ln(e) = \ln(0{,}9) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}9)}{-\lambda \ln(e)} = \frac{\ln(0{,}9)}{-\lambda}$$

Question 1°: $\lambda = \ln(0{,}5)/(-T) = \ln(0{,}5)/(-1622) \approx 4{,}273\times10^{-4}$

3°) La demi-vie du radium est de 1622 ans. Au bout de combien de temps aura-t-il perdu 10% de sa masse ?

$M(t) = M_0\, e^{-\lambda t} = 90\%\, M_0 \iff \underbrace{e^{-\lambda t} = 90\%}_{\text{antécédents}}$

$\iff \ln(e^{-\lambda t}) \underset{\text{images}}{=} \ln(0{,}9)$

car la fonction ln est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$\iff -\lambda t\ \ln(e) = \ln(0{,}9) \iff t = \frac{\ln(0{,}9)}{-\lambda \ln(e)} = \frac{\ln(0{,}9)}{-\lambda}$$

Question 1°: $\lambda = \ln(0{,}5)/(-T) = \ln(0{,}5)/(-1622) \approx 4{,}273\times10^{-4}$

$\Rightarrow t \approx \ln(0{,}9)/(-4{,}273\times10^{-4}) \approx$ **246,6 années**

Exercice 8 :

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 40 \}$

est le coût de construction en millions d'€

et x le nombre de maisons construites.

1°) Quel est le coût minimal ? Pour combien de maisons ?

2°) Chaque maison est vendue 300 000 €. Quel est le bénéfice maximal ? Pour combien de maisons ?

$f(x) = 0,4x + 5 - 2,8 \ln(x + 2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; ... ; 40 \}$

est le coût de construction en millions d'€

et x le nombre de maisons construites.

1°) Quel est le coût minimal ? Pour combien de maisons ?

$f'(x) = (0,4x + 5)' - 2,8 (\ln(x + 2))'$?

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 40 \}$

est le coût de construction en millions d'€

et x le nombre de maisons construites.

1°) Quel est le coût minimal ? Pour combien de maisons ?

$f\,'(x) = (0{,}4x + 5)' - 2{,}8 \,(\ln(x + 2))'$?

Faux ! f n'est pas dérivable

car elle est discontinue sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 40 \}$

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; ... ; 40 \}$

est le coût de construction en millions d'€

et x le nombre de maisons construites.

1°) Quel est le coût minimal ? Pour combien de maisons ?

f n'est pas dérivable

car elle est discontinue sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; ... ; 40 \}$

Soit la fonction g définie par $g(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ sur $[0 ; 40]$ donc dérivable sur $] 0 ; 40 [$.

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; ... ; 40 \}$

1°) Quel est le coût minimal ? Pour combien de maisons ?

Soit la fonction g définie par $g(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ sur $[0 ; 40]$ donc dérivable sur $] 0 ; 40 [$.

$g'(x) = (0{,}4x + 5)' - 2{,}8 (\ln(x + 2))' = 0{,}4 - 2{,}8 (\ln(u))'$

$$= 0{,}4 - 2{,}8 \frac{1}{u} \times u' = 0{,}4 - 2{,}8 \frac{1}{x + 2} \times 1$$

qu'il faut factoriser

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 40 \}$

1°) Quel est le coût minimal ? Pour combien de maisons ?

Soit la fonction g définie par $g(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ sur $[0 ; 40]$ donc dérivable sur $] 0 ; 40 [$.

$$g'(x) = (0{,}4x + 5)' - 2{,}8 (\ln(x + 2))' = 0{,}4 - 2{,}8 (\ln(u))'$$

$$= 0{,}4 - 2{,}8 \frac{1}{u} \times u' = 0{,}4 - 2{,}8 \frac{1}{x + 2} \times 1$$

$$= \frac{0{,}4(x + 2) - 2{,}8}{x + 2} = \frac{0{,}4x + 0{,}8 - 2{,}8}{x + 2} = \frac{0{,}4x - 2}{x + 2}$$

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8\ln(x+2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 40 \}$

1°) Quel est le coût minimal ? Pour combien de maisons ?

Soit la fonction $g(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8\ln(x+2)$ sur $[0 ; 40]$

$$g'(x) = \frac{0{,}4x - 2}{x + 2}$$

Sur $[0 ; 40]$ $x + 2 > 0$ $\Longrightarrow$ $g'(x)$ est du signe de $0{,}4x - 2$

$$0{,}4x - 2 = 0 \Longleftrightarrow 0{,}4x = 2 \Longleftrightarrow x = 2/0{,}4 = 20/4 = 5$$

$$0{,}4x - 2 < 0 \Longleftrightarrow 0{,}4x < 2 \Longleftrightarrow x < 2/0{,}4 = 20/4 = 5$$

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 40 \}$

1°) Quel est le coût minimal ? Pour combien de maisons ?

Soit la fonction $g(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ sur $[0 ; 40]$

$$g'(x) = \frac{0{,}4x - 2}{x + 2}$$

Sur $[0 ; 40]$ $x + 2 > 0$ $\Rightarrow$ $g'(x)$ est du signe de $0{,}4x - 2$

$0{,}4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 0{,}4x = 2 \Leftrightarrow x = 2/0{,}4 = 20/4 = 5$

$0{,}4x - 2 < 0 \Leftrightarrow 0{,}4x < 2 \Leftrightarrow x < 2/0{,}4 = 20/4 = 5$

x	0		5		40
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$g(x)$					

*Remarque : g n'est **pas** dérivable en 0 et 40 car il n'y a qu'une **demi**-tangente !*

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 40 \}$

1°) Quel est le coût minimal ? Pour combien de maisons ?

Soit la fonction $g(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ sur $[0 ; 40]$

$$g'(x) = \frac{0{,}4x - 2}{x + 2}$$

Sur $[0 ; 40]$ $x + 2 > 0$

$\Rightarrow$ $g'(x)$ est du signe de $0{,}4x - 2$

$0{,}4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 0{,}4x = 2 \Leftrightarrow x = 2/0{,}4 = 20/4 = 5$

$0{,}4x - 2 < 0 \Leftrightarrow 0{,}4x < 2 \Leftrightarrow x < 2/0{,}4 = 20/4 = 5$

x	0		5		40
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 40 \}$

1°) Quel est le coût minimal ? Pour combien de maisons ?

Soit la fonction $g(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ sur $[0 ; 40]$

$$g'(x) = \frac{0{,}4x - 2}{x + 2}$$

Sur $[0 ; 40]$ $\quad x + 2 > 0$

⇒ $g'(x)$ est du signe de $0{,}4x - 2$

$0{,}4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 0{,}4x = 2 \Leftrightarrow x = 2/0{,}4 = 20/4 = 5$

$0{,}4x - 2 < 0 \Leftrightarrow 0{,}4x < 2 \Leftrightarrow x < 2/0{,}4 = 20/4 = 5$

x	0	1 2 3 4	5	6 etc…	40
g'(x)	ǁ	–	0	+	ǁ
g(x)	•	↘ • • • •	•	↗ •	

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8\ln(x+2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 40 \}$

1°) Quel est le coût minimal ? Pour combien de maisons ?

Soit la fonction $g(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8\ln(x+2)$ sur $[0 ; 40]$

$$g'(x) = \frac{0{,}4x - 2}{x + 2}$$

Sur $[0 ; 40]$ $x + 2 > 0$ $\Rightarrow$ $g'(x)$ est du signe de $0{,}4x - 2$

$0{,}4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 0{,}4x = 2 \Leftrightarrow x = 2/0{,}4 = 20/4 = 5$

$0{,}4x - 2 < 0 \Leftrightarrow 0{,}4x < 2 \Leftrightarrow x < 2/0{,}4 = 20/4 = 5$

x	0	1 2 3 4	5	6 etc…	40
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$g(x)$		↘		↗	

Réponse : coût minimal $f(5)$

$f(5) = 7 - 2{,}8\ln(7) \approx$ **1,55**$\times 10^6$ €

pour **5** maisons.

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x+2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 40 \}$

2°) Chaque maison est vendue 300 000 €. Quel est le bénéfice maximal ? Pour combien de maisons ?

Bénéfice en millions d'€

$B(x)$ = Recettes – Coût de construction

$= (300000/10^6)x - f(x)$

$= 0{,}3x - (0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x+2))$

$= 0{,}3x - 0{,}4x - 5 + 2{,}8 \ln(x+2)$

$= -0{,}1x - 5 + 2{,}8 \ln(x+2)$

Soit $h(x) = -0{,}1x - 5 + 2{,}8 \ln(x+2)$ sur $[0 ; 40]$

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8\ln(x+2)$ définie sur $\{\, 0 \,;\, 1 \,;\, 2 \,;\, \ldots \,;\, 40 \,\}$

2°) Chaque maison coûte 300 000 € à construire. Quel est le bénéfice maximal ? Pour combien de maisons ?

Bénéfice $\quad B(x) = \text{Recettes} - \text{Coût} = -\,0{,}1x - 5 + 2{,}8\ln(x+2)$

Soit $\quad h(x) = -\,0{,}1x - 5 + 2{,}8\ln(x+2) \quad$ sur $[\,0 \,;\, 40\,]$

$$h'(x) = (\,-\,0{,}1x - 5\,)' + 2{,}8\,(\,\ln(x+2)\,)' = -\,0{,}1 + 2{,}8\,(\,\ln(u)\,)'$$

$$= -\,0{,}1 + 2{,}8\,\frac{1}{u} \times u' = -\,0{,}1 + 2{,}8\,\frac{1}{x+2} \times 1$$

$$= \frac{-\,0{,}1(x+2) + 2{,}8}{x+2} = \frac{-\,0{,}1x - 0{,}2 + 2{,}8}{x+2} = \frac{-\,0{,}1x + 2{,}6}{x+2}$$

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8\ \ln(x + 2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 40 \}$

2°) Bénéfice maximal ? Pour combien de maisons ?

Soit la fonction $h(x) = -\,0{,}1x - 5 + 2{,}8\ \ln(x + 2)$ sur $[0 ; 40]$

$$h'(x) = \frac{-\,0{,}1x + 2{,}6}{x + 2}$$

Sur $[0 ; 40]$ $x + 2 > 0$

$\Rightarrow$ $h'(x)$ est du signe de $-\,0{,}1x + 2{,}6$

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8 \ln(x + 2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 40 \}$

2°) Bénéfice maximal ? Pour combien de maisons ?

Soit la fonction $h(x) = - 0{,}1x - 5 + 2{,}8 \ln(x + 2)$ sur $[0 ; 40]$

$$h'(x) = \frac{- 0{,}1x + 2{,}6}{x + 2}$$

Sur $[0 ; 40]$ $x + 2 > 0$ $\Longrightarrow$ $h'(x)$ est du signe de $- 0{,}1x + 2{,}6$

$- 0{,}1x + 2{,}6 = 0 \Longleftrightarrow - 0{,}1x = - 2{,}6 \Longleftrightarrow x = - 2{,}6/(- 0{,}1) = 26/1 = 26$

$- 0{,}1x + 2{,}6 < 0 \Longleftrightarrow - 0{,}1x < - 2{,}6 \Longleftrightarrow x > - 2{,}6/(- 0{,}1) = 26/1 = 26$

x	0		26		40
$h'(x)$	||	–	0	+	||
$h(x)$					

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8\ln(x+2)$ définie sur $\{\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \dots\ ;\ 40\ \}$

2°) Bénéfice maximal ? Pour combien de maisons ?

Soit la fonction $h(x) = -\ 0{,}1x - 5 + 2{,}8\ln(x+2)$ sur $[\ 0\ ;\ 40\ ]$

$$h'(x) = \frac{-\ 0{,}1x + 2{,}6}{x + 2}$$

Sur $[\ 0\ ;\ 40\ ]$ $\quad x + 2 > 0$

$\Rightarrow$ $h'(x)$ est du signe de $-\ 0{,}1x + 2{,}6$

$-\ 0{,}1x + 2{,}6 = 0 \iff -\ 0{,}1x = -\ 2{,}6 \iff x = -\ 2{,}6/(-\ 0{,}1) = 26/1 = 26$

$-\ 0{,}1x + 2{,}6 < 0 \iff -\ 0{,}1x < -\ 2{,}6 \iff x > -\ 2{,}6/(-\ 0{,}1) = 26/1 = 26$

x	0		26		40
$h'(x)$	||	–	0	+	||
$h(x)$		↗		↘	

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8\ln(x+2)$ définie sur $\{ 0 ; 1 ; 2 ; ... ; 40 \}$

2°) Bénéfice maximal ? Pour combien de maisons ?

Soit la fonction $h(x) = -0{,}1x - 5 + 2{,}8\ln(x+2)$ sur $[0 ; 40]$

$$h'(x) = \frac{-0{,}1x + 2{,}6}{x+2}$$

Sur $[0 ; 40]$ $x + 2 > 0$ ⟹ $h'(x)$ est du signe de $-0{,}1x + 2{,}6$

$-0{,}1x + 2{,}6 = 0 \Leftrightarrow -0{,}1x = -2{,}6 \Leftrightarrow x = -2{,}6/(-0{,}1) = 26/1 = 26$

$-0{,}1x + 2{,}6 < 0 \Leftrightarrow -0{,}1x < -2{,}6 \Leftrightarrow x > -2{,}6/(-0{,}1) = 26/1 = 26$

x	0	1 2 etc…	26	27 etc…	40
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$h(x)$		↗		↘	

$f(x) = 0{,}4x + 5 - 2{,}8\ln(x+2)$ définie sur $\{\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\,;\,40\,\}$

2°) Bénéfice maximal ? Pour combien de maisons ?

Soit la fonction $h(x) = -\,0{,}1x - 5 + 2{,}8\ln(x+2)$ sur $[\,0\,;\,40\,]$

$$h'(x) = \frac{-\,0{,}1x + 2{,}6}{x + 2}$$

Sur $[\,0\,;\,40\,]$ $x + 2 > 0$ ⟹ $h'(x)$ est du signe de $-\,0{,}1x + 2{,}6$

$-\,0{,}1x + 2{,}6 = 0 \iff -\,0{,}1x = -\,2{,}6 \iff x = -\,2{,}6/(-\,0{,}1) = 26/1 = 26$

$-\,0{,}1x + 2{,}6 < 0 \iff -\,0{,}1x < -\,2{,}6 \iff x > -\,2{,}6/(-\,0{,}1) = 26/1 = 26$

x	0	1 2 etc…	26	27 etc…	40
h'(x)	‖	–	0	+	‖
h(x)					

Réponse : bénef. maximal f(26)

$f(26) = -\,7{,}6 + 2{,}8\ln(28) \approx$ **1,73**$\times 10^6$ €

pour **26** maisons.

Exo 9 : $f(x) = 50\,(1{,}04^x) + 10$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la fréquence cardiaque et x la puissance de l'effort

Quelles puissances créent plus de 180 battements/mn ?

Exo 9 : $f(x) = 50\,(1{,}04^x) + 10$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la fréquence cardiaque et x la puissance de l'effort

Quelles puissances créent plus de 180 battements/mn ?

$f(x) \geq 180 \iff 50\,(1{,}04^x) + 10 \geq 180$

Exo 9 : $f(x) = 50\,(\,1{,}04^{x}\,) + 10$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la fréquence cardiaque et x la puissance de l'effort

Quelles puissances créent plus de 180 battements/mn ?

$f(x) \geq 180 \Longleftrightarrow 50\,(\,1{,}04^{x}\,) + 10 \geq 180$

$\Longleftrightarrow 50\,(\,1{,}04^{x}\,) \geq 180 - 10 = 170$

Exo 9 : $f(x) = 50\,(1{,}04^x) + 10$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la fréquence cardiaque et x la puissance de l'effort

Quelles puissances créent plus de 180 battements/mn ?

$f(x) \geq 180 \iff 50\,(1{,}04^x) + 10 \geq 180$

$\iff 50\,(1{,}04^x) \geq 180 - 10 = 170 \iff 1{,}04^x \geq \dfrac{170}{50} = 3{,}4$

Exo 9 : $f(x) = 50\,(1{,}04^x) + 10$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la fréquence cardiaque et x la puissance de l'effort

Quelles puissances créent plus de 180 battements/mn ?

$f(x) \geq 180 \iff 50\,(1{,}04^x) + 10 \geq 180$

$\iff 50\,(1{,}04^x) \geq 180 - 10 = 170 \iff 1{,}04^x \geq \dfrac{170}{50} = 3{,}4$

antécédents

$\iff \ln(1{,}04^x) \geq \ln(3{,}4)$

images

car la fonction ln est str. croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

Exo 9 : $f(x) = 50\,(1{,}04^x) + 10$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la fréquence cardiaque et x la puissance de l'effort

Quelles puissances créent plus de 180 battements/mn ?

$f(x) \geq 180 \iff 50\,(1{,}04^x) + 10 \geq 180$

$\iff 50\,(1{,}04^x) \geq 180 - 10 = 170 \iff 1{,}04^x \geq \dfrac{170}{50} = 3{,}4$

antécédents

$\iff \ln(1{,}04^x) \geq \ln(3{,}4)$

images

car la fonction ln est str. croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\iff x\ln(1{,}04) \geq \ln(3{,}4)$ car $\ln(a^x) = x\ln(a)$ pour tout $a > 0$

Exo 9 : $f(x) = 50\,(1{,}04^x) + 10$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la fréquence cardiaque et x la puissance de l'effort

Quelles puissances créent plus de 180 battements/mn ?

$f(x) \geq 180 \Longleftrightarrow 50\,(1{,}04^x) + 10 \geq 180$

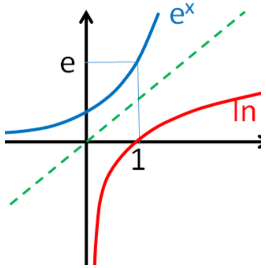
$\Longleftrightarrow 50\,(1{,}04^x) \geq 180 - 10 = 170 \Longleftrightarrow 1{,}04^x \underset{\text{antécédents}}{\geq} \dfrac{170}{50} = 3{,}4$

$\Longleftrightarrow \ln(1{,}04^x) \underset{\text{images}}{\geq} \ln(3{,}4)$

car la fonction ln est str. croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\Longleftrightarrow x\ln(1{,}04) \geq \ln(3{,}4)$ car $\ln(a^x) = x\ln(a)$ pour tout $a > 0$

$\Longleftrightarrow x \geq \dfrac{\ln(3{,}4)}{\ln(1{,}04)}$



$1{,}04 > 1 \Longrightarrow$ division par le positif $\ln(1{,}04)$

Exo 9 : $f(x) = 50\,(1{,}04^x) + 10$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la fréquence cardiaque et x la puissance de l'effort

Quelles puissances créent plus de 180 battements/mn ?

$f(x) \geq 180 \iff 50\,(1{,}04^x) + 10 \geq 180$

$\iff 50\,(1{,}04^x) \geq 180 - 10 = 170 \iff \underset{\text{antécédents}}{1{,}04^x} \geq \dfrac{170}{50} = 3{,}4$

$\iff \underset{\text{images}}{\ln(1{,}04^x) \geq \ln(3{,}4)}$

car la fonction ln est str. croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\iff x\ln(1{,}04) \geq \ln(3{,}4)$ car $\ln(a^x) = x\ln(a)$ pour tout $a > 0$

$\iff x \geq \dfrac{\ln(3{,}4)}{\ln(1{,}04)} \approx 31{,}2 \Rightarrow$ Les puissances **au-dessus** de ≈ **31,2** Watt

$1{,}04 > 1 \Rightarrow$ division par le positif $\ln(1{,}04)$

Exo 10 : capital C_0 taux d'intérêt mensuel de 0,7%.

A partir de quel mois votre capital a augmenté de 70% ?

Exo 10 : capital C_0 taux d’intérêt mensuel de 0,7%.

A partir de quel mois votre capital a augmenté de 70% ?

$C_{n+1} = C_n + \text{Intérêts} = C_n + 0{,}7\%\, C_n = (1 + 0{,}7\%)\, C_n = 1{,}007\, C_n$

Exo 10 : capital C_0 taux d'intérêt mensuel de 0,7%.

A partir de quel mois votre capital a augmenté de 70% ?

$C_{n+1} = C_n + \text{Intérêts} = C_n + 0{,}7\%\ C_n = (1 + 0{,}7\%)\ C_n = 1{,}007\ C_n$

$C_2 = 1{,}007\ C_1 = 1{,}007\ (1{,}007\ C_0) = 1{,}007^2\ C_0$

Exo 10 : capital C_0 taux d'intérêt mensuel de 0,7%.

A partir de quel mois votre capital a augmenté de 70% ?

$C_{n+1} = C_n + \text{Intérêts} = C_n + 0{,}7\%\ C_n = (1 + 0{,}7\%)\ C_n = 1{,}007\ C_n$

$C_2 = 1{,}007\ C_1 = 1{,}007\ (1{,}007\ C_0) = 1{,}007^2\ C_0$

etc… $\Rightarrow$ $C_n = 1{,}007^n\ C_0$

Exo 10 : capital C_0 taux d'intérêt mensuel de 0,7%.

A partir de quel mois votre capital a augmenté de 70% ?

$C_{n+1} = C_n + \text{Intérêts} = C_n + 0{,}7\%\ C_n = (\ 1 + 0{,}7\%\ )\ C_n = 1{,}007\ C_n$

$C_2 = 1{,}007\ C_1 = 1{,}007\ (1{,}007\ C_0) = 1{,}007^2\ C_0$

etc… $\Rightarrow$ $C_n = 1{,}007^n\ C_0$

$C_n \geq C_0 + 70\%\ C_0 = (\ 1 + 70\%\ )\ C_0 = 1{,}7\ C_0$

Exo 10 : capital C_0 taux d'intérêt mensuel de 0,7%.

A partir de quel mois votre capital a augmenté de 70% ?

$C_{n+1} = C_n + \text{Intérêts} = C_n + 0{,}7\%\ C_n = (1 + 0{,}7\%)\ C_n = 1{,}007\ C_n$

$C_2 = 1{,}007\ C_1 = 1{,}007\ (1{,}007\ C_0) = 1{,}007^2\ C_0$

etc… $\Rightarrow$ $C_n = 1{,}007^n\ C_0$

$C_n \geq 1{,}7\ C_0 \Leftrightarrow 1{,}007^n\ C_0 \geq 1{,}7\ C_0$

Exo 10 : capital C_0 taux d'intérêt mensuel de 0,7%.

A partir de quel mois votre capital a augmenté de 70% ?

$C_{n+1} = C_n + \text{Intérêts} = C_n + 0{,}7\%\, C_n = (1 + 0{,}7\%)\, C_n = 1{,}007\, C_n$

$C_2 = 1{,}007\, C_1 = 1{,}007\, (1{,}007\, C_0) = 1{,}007^2\, C_0$

etc... $\Rightarrow$ $C_n = 1{,}007^n\, C_0$

$C_n \geq 1{,}7\, C_0 \iff 1{,}007^n\, C_0 \geq 1{,}7\, C_0 \iff 1{,}007^n \geq 1{,}7\, \dfrac{C_0}{C_0} = 1{,}7$

Exo 10 : capital C_0 taux d'intérêt mensuel de 0,7%.

A partir de quel mois votre capital a augmenté de 70% ?

$C_{n+1} = C_n + \text{Intérêts} = C_n + 0{,}7\%\ C_n = (1 + 0{,}7\%)\ C_n = 1{,}007\ C_n$

$C_2 = 1{,}007\ C_1 = 1{,}007\ (1{,}007\ C_0) = 1{,}007^2\ C_0$

etc... $\Rightarrow$ $C_n = 1{,}007^n\ C_0$

$C_n \geq 1{,}7\ C_0 \Leftrightarrow 1{,}007^n\ C_0 \geq 1{,}7\ C_0 \Leftrightarrow \underbrace{1{,}007^n \geq 1{,}7}_{\textit{antécédents}}\ \dfrac{C_0}{C_0} = 1{,}7$

$\Leftrightarrow \underbrace{\ln(1{,}007^n) \geq \ln(1{,}7)}_{\textit{images}}$

car la fonction ln est str. croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

Exo 10 : capital C_0 taux d'intérêt mensuel de 0,7%.

A partir de quel mois votre capital a augmenté de 70% ?

$C_{n+1} = C_n + \text{Intérêts} = C_n + 0{,}7\%\ C_n = (1 + 0{,}7\%)\ C_n = 1{,}007\ C_n$

$C_2 = 1{,}007\ C_1 = 1{,}007\ (1{,}007\ C_0) = 1{,}007^2\ C_0$

etc… $\Longrightarrow$ $C_n = 1{,}007^n\ C_0$

$C_n \geq 1{,}7\ C_0 \Longleftrightarrow 1{,}007^n\ C_0 \geq 1{,}7\ C_0 \Longleftrightarrow \underbrace{1{,}007^n \geq 1{,}7}_{\textit{antécédents}} \dfrac{C_0}{C_0} = 1{,}7$

$\Longleftrightarrow \underbrace{\ln(1{,}007^n) \geq \ln(1{,}7)}_{\textit{images}}$

car la fonction ln est str. croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\Longleftrightarrow n \ln(1{,}007) \geq \ln(1{,}7)$ car $\ln(a^x) = x \ln(a)$ pour tout $a > 0$

Exo 10 : capital C_0 taux d'intérêt mensuel de 0,7%.

A partir de quel mois votre capital a augmenté de 70% ?

$$C_{n+1} = C_n + \text{Intérêts} = C_n + 0{,}7\%\, C_n = (\,1 + 0{,}7\%\,)\, C_n = 1{,}007\, C_n$$

$$C_2 = 1{,}007\, C_1 = 1{,}007\,(1{,}007\, C_0) = 1{,}007^2\, C_0$$

etc… $\Longrightarrow$ $C_n = 1{,}007^n\, C_0$

$$C_n \geq 1{,}7\, C_0 \iff 1{,}007^n\, C_0 \geq 1{,}7\, C_0 \iff 1{,}007^n \geq 1{,}7\, \frac{C_0}{C_0} = 1{,}7$$

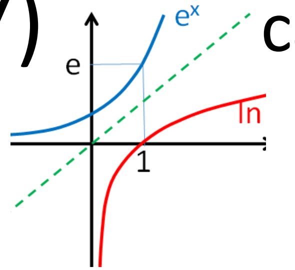
antécédents

$$\iff \ln(1{,}007^n) \geq \ln(1{,}7)$$

images

car la fonction ln est str. croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$\iff n \ln(1{,}007) \geq \ln(1{,}7)$$



car $\ln(a^x) = x\ln(a)$ pour tout $a > 0$

$$\iff n \geq \frac{\ln(1{,}7)}{\ln(1{,}007)}$$

$1{,}007 > 1 \Longrightarrow$ division par le positif $\ln(1{,}007)$

Exo 10 : capital C_0 taux d'intérêt mensuel de 0,7%.

A partir de quel mois votre capital a augmenté de 70% ?

$C_{n+1} = C_n + \text{Intérêts} = C_n + 0{,}7\%\ C_n = (1 + 0{,}7\%)\ C_n = 1{,}007\ C_n$

$C_2 = 1{,}007\ C_1 = 1{,}007\ (1{,}007\ C_0) = 1{,}007^2\ C_0$

etc… $\Longrightarrow$ $C_n = 1{,}007^n\ C_0$

$C_n \geq 1{,}7\ C_0 \Longleftrightarrow 1{,}007^n\ C_0 \geq 1{,}7\ C_0 \Longleftrightarrow 1{,}007^n \geq 1{,}7\ \dfrac{C_0}{C_0} = 1{,}7$

antécédents

$\Longleftrightarrow \ln(1{,}007^n) \geq \ln(1{,}7)$

images

car la fonction ln est str. croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\Longleftrightarrow n \ln(1{,}007) \geq \ln(1{,}7)$ car $\ln(a^x) = x \ln(a)$ pour tout $a > 0$

$\Longleftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(1{,}7)}{\ln(1{,}007)} \approx 76{,}07$ **Réponse :** à partir du **77ème** mois

$1{,}007 > 1 \Longrightarrow$ division par le positif $\ln(1{,}007)$

Exo 11 : $f(t) = 20 + 80\,e^{-0,1t}$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la température d’un moteur et t le temps en mn.

Combien de temps doit-il attendre qu’il soit en-dessous de 35 °C ?

Exo 11 : $f(t) = 20 + 80\,e^{-0,1t}$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la température d'un moteur et t le temps en mn.

Combien de temps doit-il attendre qu'il soit en-dessous de 35 °C ?

Même méthode qu'à l'exo 9 …

Exo 11 : $f(t) = 20 + 80\,e^{-0,1t}$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la température d'un moteur et t le temps en mn.

Combien de temps doit-il attendre qu'il soit en-dessous de 35 °C ?

$f(t) \leq 35 \iff 20 + 80\,e^{-0,1t} \leq 35$

Exo 11 : $f(t) = 20 + 80\,e^{-0,1t}$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la température d'un moteur et t le temps en mn.

Combien de temps doit-il attendre qu'il soit en-dessous de 35 °C ?

$f(t) \leq 35 \iff 20 + 80\,e^{-0,1t} \leq 35$

$\iff 80\,e^{-0,1t} \leq 35 - 20 = 15$

Exo 11 : $f(t) = 20 + 80\,e^{-0,1t}$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la température d'un moteur et t le temps en mn.

Combien de temps doit-il attendre qu'il soit en-dessous de 35 °C ?

$f(t) \leq 35 \iff 20 + 80\,e^{-0,1t} \leq 35$

$\iff 80\,e^{-0,1t} \leq 35 - 20 = 15 \iff e^{-0,1t} \leq \dfrac{15}{80} = 0,1875$

Exo 11 : $f(t) = 20 + 80\,e^{-0,1t}$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la température d'un moteur et t le temps en mn.

Combien de temps doit-il attendre qu'il soit en-dessous de 35 °C ?

$f(t) \leq 35 \iff 20 + 80\,e^{-0,1t} \leq 35$

$\iff 80\,e^{-0,1t} \leq 35 - 20 = 15 \iff \underbrace{e^{-0,1t} \leq \frac{15}{80}}_{\textit{antécédents}} = 0,1875$

$\iff \underbrace{\ln(e^{-0,1t}) \leq \ln(0,1875)}_{\textit{images}}$

car la fonction ln est str. croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

Exo 11 : $f(t) = 20 + 80\, e^{-0,1t}$ définie sur $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$

est la température d'un moteur et t le temps en mn.

Combien de temps doit-il attendre qu'il soit en-dessous de 35 °C ?

$f(t) \leq 35 \iff 20 + 80\, e^{-0,1t} \leq 35$

$\iff 80\, e^{-0,1t} \leq 35 - 20 = 15 \iff e^{-0,1t} \leq \dfrac{15}{80} = 0,1875$

antécédents

$\iff \ln(e^{-0,1t}) \leq \ln(0,1875)$

images

car la fonction ln est str. croissante sur $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$

$\iff -\,0,1t \leq \ln(0,1875)$ car $\ln(e^x) = x$ pour tout x réel

Exo 11 : $f(t) = 20 + 80\,e^{-0,1t}$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la température d'un moteur et t le temps en mn.

Combien de temps doit-il attendre qu'il soit en-dessous de 35 °C ?

$f(t) \leq 35 \iff 20 + 80\,e^{-0,1t} \leq 35$

$\iff 80\,e^{-0,1t} \leq 35 - 20 = 15 \iff \underbrace{e^{-0,1t} \leq \frac{15}{80}}_{\textit{antécédents}} = 0,1875$

$\iff \underbrace{\ln(e^{-0,1t}) \leq \ln(0,1875)}_{\textit{images}}$

car la fonction ln est str. croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\iff -0,1t \leq \ln(0,1875)$ car $\ln(e^x) = x$ pour tout x réel

$\iff t \geq \dfrac{\ln(0,1875)}{-0,1}$ *division par le négatif $-0,1$*

Exo 11 : $f(t) = 20 + 80\,e^{-0,1t}$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la température d'un moteur et t le temps en mn.

Combien de temps doit-il attendre qu'il soit en-dessous de 35 °C ?

$f(t) \leq 35 \iff 20 + 80\,e^{-0,1t} \leq 35$

$\iff 80\,e^{-0,1t} \leq 35 - 20 = 15 \iff \underbrace{e^{-0,1t} \leq \dfrac{15}{80}}_{\text{antécédents}} = 0,1875$

$\iff \underbrace{\ln(e^{-0,1t}) \leq \ln(0,1875)}_{\text{images}}$

car la fonction ln est str. croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\iff -0,1t \leq \ln(0,1875)$ car $\ln(e^x) = x$ pour tout x réel

$\iff t \geq \dfrac{\ln(0,1875)}{-0,1} \approx 16,74$ mn *division par le négatif $-0,1$*

Réponse : à partir de $\approx$ **16,74** mn

Exo 11 : $f(t) = 20 + 80\,e^{-0,1t}$ définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$

est la température d'un moteur et t le temps en mn.

Combien de temps doit-il attendre qu'il soit en-dessous de 35 °C ?

$f(t) \leq 35 \iff 20 + 80\,e^{-0,1t} \leq 35$

$\iff 80\,e^{-0,1t} \leq 35 - 20 = 15 \iff \underbrace{e^{-0,1t} \leq \dfrac{15}{80}}_{\text{antécédents}} = 0,1875$

$\iff \underbrace{\ln(e^{-0,1t}) \leq \ln(0,1875)}_{\text{images}}$

car la fonction ln est str. croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$\iff -0,1t \leq \ln(0,1875)$ car $\ln(e^x) = x$ pour tout x réel

$\iff t \geq \dfrac{\ln(0,1875)}{-0,1} \approx 16,74$ mn *division par le négatif $-0,1$*

Réponse : à partir de $\approx$ **16** mn **44** s

Exercice 12 :

$f(x) = -0,005x^2 + 0,1x + 5 + 2\ln(x)$ définie sur $[1 ; 40]$

est le nombre de bactéries

et x la température en °C.

1°) Démontrez que $$f'(x) = \frac{-0,01(x+10)(x-20)}{x}$$

2°) A quelle température obtient-on un maximum de bactéries ?

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur $[\,1\,;\,40\,]$

1°) Démontrez que $f\,'(x) = \dfrac{-0{,}01\,(x+10)\,(x-20)}{x}$

$f\,'(x) = (-0{,}005x^2)' + (0{,}1x + 5)' + 2\,(\ln(x))'$

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur $[\,1\,;\,40\,]$

1°) Démontrez que $f'(x) = \dfrac{-0{,}01\,(x + 10)\,(x - 20)}{x}$

$$f'(x) = (-0{,}005x^2)' + (0{,}1x + 5)' + 2\,(\ln(x))'$$

$$= -0{,}005\,(2x) + 0{,}1 + 2\,\frac{1}{x}$$

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur $[\,1\,;\,40\,]$

1°) Démontrez que $f'(x) = \dfrac{-0{,}01\,(x+10)\,(x-20)}{x}$

$$f'(x) = (-0{,}005x^2)' + (0{,}1x + 5)' + 2\,(\ln(x))'$$

$$= -0{,}005\,(2x) + 0{,}1 + 2\,\frac{1}{x} = -0{,}01x + 0{,}1 + \frac{2}{x}$$

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur $[\,1\,;\,40\,]$

1°) Démontrez que $f'(x) = \dfrac{-0{,}01\,(x+10)\,(x-20)}{x}$

$$f'(x) = (-0{,}005x^2)' + (0{,}1x+5)' + 2\,(\ln(x))'$$

$$= -0{,}005\,(2x) + 0{,}1 + 2\,\frac{1}{x} = -0{,}01x + 0{,}1 + \frac{2}{x}$$

$$= \frac{(-0{,}01x + 0{,}1)x}{x} + \frac{2}{x}$$

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur $[\,1\,;\,40\,]$

1°) Démontrez que $f'(x) = \dfrac{-0{,}01\,(x+10)\,(x-20)}{x}$

$$f'(x) = (-0{,}005x^2)' + (0{,}1x + 5)' + 2\,(\ln(x))'$$

$$= -0{,}005\,(2x) + 0{,}1 + 2\,\frac{1}{x} = -0{,}01x + 0{,}1 + \frac{2}{x}$$

$$= \frac{(-0{,}01x + 0{,}1)x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{-0{,}01x^2 + 0{,}1x + 2}{x}$$

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur $[\,1\,;\,40\,]$

1°) $$f'(x) = \frac{-0{,}01\,(x+10)\,(x-20)}{x}$$

$$f'(x) = (-0{,}005x^2)' + (0{,}1x + 5)' + 2\,(\ln(x))'$$

$$= -0{,}005\,(2x) + 0{,}1 + 2\,\frac{1}{x} = -0{,}01x + 0{,}1 + \frac{2}{x}$$

$$= \frac{(-0{,}01x + 0{,}1)x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{-0{,}01x^2 + 0{,}1x + 2}{x}$$

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur $[\,1\,;\,40\,]$

1°) $$f'(x) = \frac{-0{,}01\,(x+10)\,(x-20)}{x} = \frac{-0{,}01(x^2 + 10x - 20x - 200)}{x}$$

$$f'(x) = (-0{,}005x^2)' + (0{,}1x + 5)' + 2\,(\ln(x))'$$

$$= -0{,}005\,(2x) + 0{,}1 + 2\,\frac{1}{x} = -0{,}01x + 0{,}1 + \frac{2}{x}$$

$$= \frac{(-0{,}01x + 0{,}1)x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{-0{,}01x^2 + 0{,}1x + 2}{x}$$

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur $[\,1\,;\,40\,]$

1°) $$f'(x) = \frac{-0{,}01\,(x+10)\,(x-20)}{x} = \frac{-0{,}01(\,x^2 - 10x - 200\,)}{x}$$

$$f'(x) = (\,-0{,}005x^2\,)' + (\,0{,}1x + 5\,)' + 2\,(\,\ln(x)\,)'$$

$$= -0{,}005\,(\,2x\,) + 0{,}1 + 2\,\frac{1}{x} = -0{,}01x + 0{,}1 + \frac{2}{x}$$

$$= \frac{(\,-0{,}01x + 0{,}1\,)x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{-0{,}01x^2 + 0{,}1x + 2}{x}$$

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur $[\,1\,;\,40\,]$

$$1°)\ f'(x) = \frac{-0{,}01\,(x+10)\,(x-20)}{x} = \frac{-0{,}01x^2 + 0{,}1x + 2}{x}$$

$$f'(x) = (-0{,}005x^2)' + (0{,}1x + 5)' + 2\,(\ln(x))'$$

$$= -0{,}005\,(2x) + 0{,}1 + 2\,\frac{1}{x} = -0{,}01x + 0{,}1 + \frac{2}{x}$$

$$= \frac{(-0{,}01x + 0{,}1)x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{-0{,}01x^2 + 0{,}1x + 2}{x}$$

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur $[\,1\,;\,40\,]$

1°) $f'(x) = \dfrac{-0{,}01\,(x+10)\,(x-20)}{x}$

2°) A quelle température obtient-on un maximum de bactéries ?

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur [1 ; 40]

1°) $f'(x) = \dfrac{-0{,}01(x+10)(x-20)}{x}$

2°) A quelle température obtient-on un maximum de bactéries ?

Sur [1 ; 40] $x > 0$ et $x + 10 > 0$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ du signe de $-0{,}01(x-20)$

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur [1 ; 40]

1°) $f'(x) = \dfrac{-0{,}01(x+10)(x-20)}{x}$

2°) A quelle température obtient-on un maximum de bactéries ?

Sur [1 ; 40] $x > 0$ et $x + 10 > 0$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ du signe de $-0{,}01(x-20)$

x	1		20		40
$-0{,}01$		$-$		$-$	
$x-20$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$f(x)$					

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur [1 ; 40]

1°) $f'(x) = \dfrac{-0{,}01\,(x+10)\,(x-20)}{x}$

2°) A quelle température obtient-on un maximum de bactéries ?

Sur [1 ; 40] $x > 0$ et $x + 10 > 0$ ⇒ $f'(x)$ du signe de $-0{,}01(x-20)$

x	1		20		40
$-0{,}01$		–		–	
$x - 20$		–	0	+	
$f'(x)$	‖	+	0	–	‖
$f(x)$		↗		↘	

Exo 12 : $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}1x + 5 + 2\ln(x)$ sur [1 ; 40]

1°) $f'(x) = \dfrac{-0{,}01\,(x+10)\,(x-20)}{x}$

2°) A quelle température obtient-on un maximum de bactéries ?

Sur [1 ; 40] $x > 0$ et $x + 10 > 0$ ⇒ $f'(x)$ du signe de $-0{,}01(x-20)$

x	1		20		40
$-0{,}01$		$-$		$-$	
$x - 20$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$		↗		↘	

Réponse :

on obtient un maximum de bactéries

à **20 °C**

Exercice 13 :

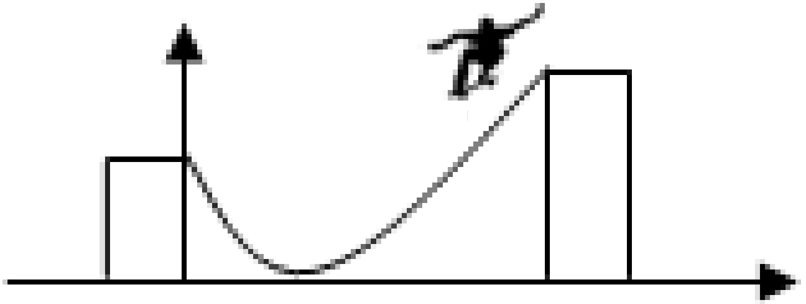
$f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 5$ définie sur $[\,0\,;\,20\,]$

est le profil d'un module de skatepark

dans un repère orthonormé $(\,O\,;\,x\,;\,y\,)$.

Quelle est la hauteur totale

décrite par le rolleur ?



Exercice 13 :

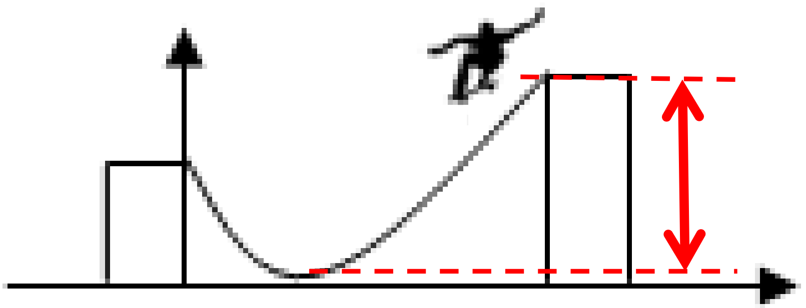
$f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 5$ définie sur $[\,0\,;\,20\,]$

est le profil d'un module de skatepark

dans un repère orthonormé $(\,O\,;\,x\,;\,y\,)$.

Quelle est la hauteur totale

décrite par le rolleur ?



Exercice 13 :

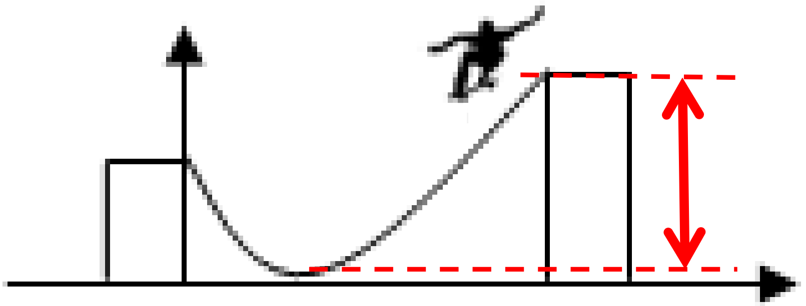
$f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 5$ définie sur [0 ; 20]

est le profil d'un module de skatepark

dans un repère orthonormé (O ; x ; y).

Quelle est la hauteur totale

décrite par le rolleur ?



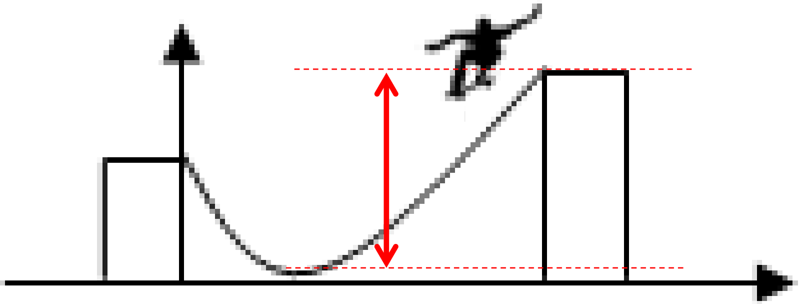
Méthode :

x	0	$?$	20
$f(x)$	$?$		y_{maxi}
		y_{mini}	

$h = y_{maxi} - y_{mini}$

Exo 13 : $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;\,20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?



$h = y_{maxi} - y_{mini}$ *trouvés dans le tableau de variation*

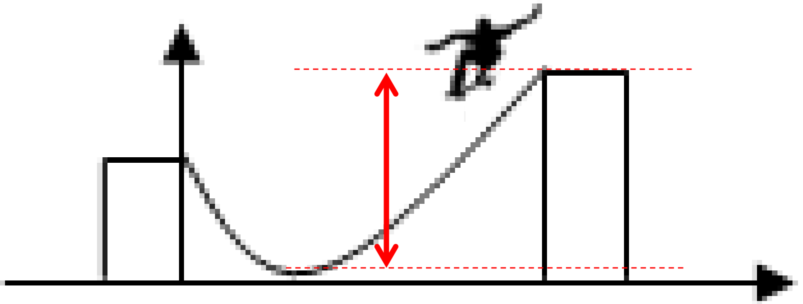
$f\,'(x) = (\,u \times v\,)' + (\,-\,3x + 5\,)' = u'\,v + v'\,u + (-\,3)$

$u = x + 1 = 1x + 1 \Rightarrow u' = 1$

$v = \ln(x + 1) = \ln(w) \Rightarrow v' = (\,\ln(w)\,)' = \dfrac{1}{w} \times w' = \dfrac{1}{x + 1} \times 1$

Exo 13 : $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?



$h = y_{maxi} - y_{mini}$ *trouvés dans le tableau de variation*

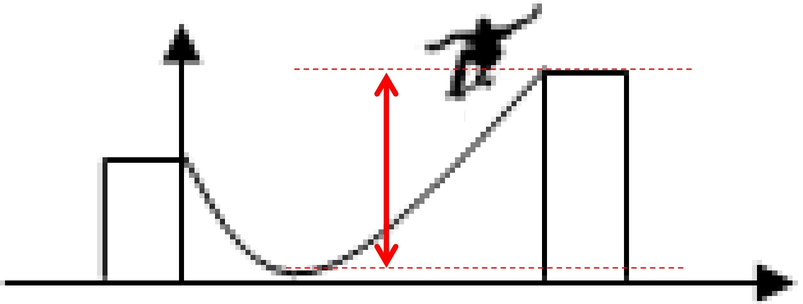
$f\,'(x) = (\,u \times v\,)' + (\,-3x+5\,)' = u'\,v + v'\,u + (-3)$

$v = \ln(x+1) = \ln(w) \Rightarrow v' = (\,\ln(w)\,)' = \dfrac{1}{w} \times w' = \dfrac{1}{x+1} \times 1$

$f\,'(x) = 1\ln(x+1) + \dfrac{1}{x+1} \times 1\ (x+1) - 3$

Exo 13 : $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?



$h = y_{maxi} - y_{mini}$ *trouvés dans le tableau de variation*

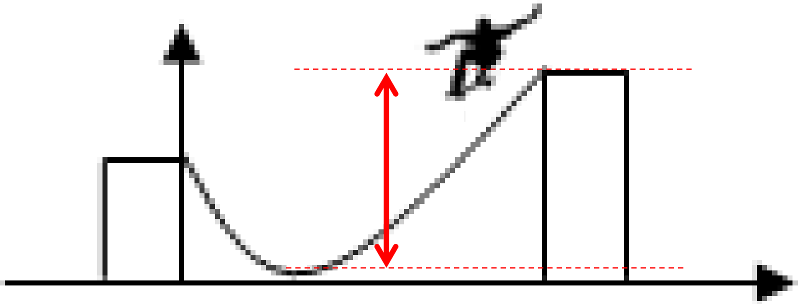
$f'(x) = (\,u \times v\,)' + (\,-3x+5\,)' = u'\,v + v'\,u + (-3)$

$$v = \ln(x+1) = \ln(w) \Rightarrow v' = (\,\ln(w)\,)' = \frac{1}{w} \times w' = \frac{1}{x+1} \times 1$$

$$f'(x) = 1\,\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \times 1\;(x+1) - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3$$

Exo 13 : $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 5$ sur $[\,0 ; 20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?



$h = y_{maxi} - y_{mini}$ *trouvés dans le tableau de variation*

$f\,'(x) = (\,u \times v\,)' + (\,-3x + 5\,)' = u'\,v + v'\,u + (-3)$

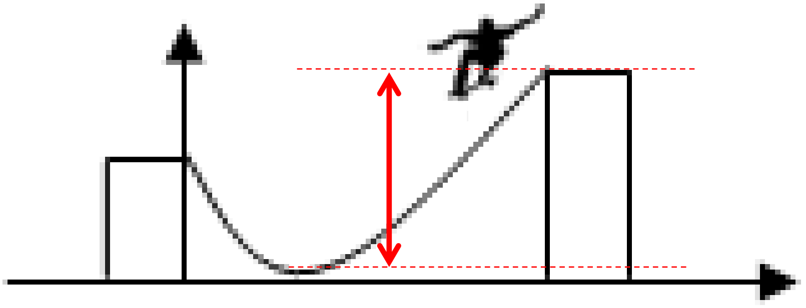
$$v = \ln(x + 1) = \ln(w) \Rightarrow v' = (\,\ln(w)\,)' = \frac{1}{w} \times w' = \frac{1}{x+1} \times 1$$

$$f\,'(x) = 1\,\ln(x + 1) + \frac{1}{x+1} \times 1\ \ (x + 1) - 3 = \ln(x + 1) + 1 - 3$$

$$= \ln(x + 1) - 2$$

Exo 13 : $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;\,20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?



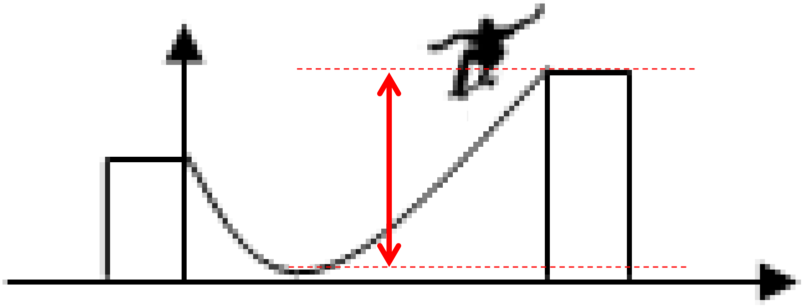
$h = y_{maxi} - y_{mini}$ *trouvés dans le tableau de variation*

$f'(x) = \ln(x + 1) - 2$

$f'(x) = 0 \iff x = \ldots$

Exo 13 : $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;\,20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?



$h = y_{maxi} - y_{mini}$ *trouvés dans le tableau de variation*

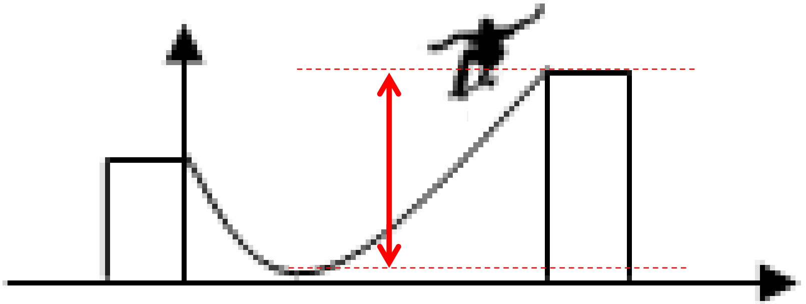
$f\,'(x) = \ln(x + 1) - 2$

$f\,'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x + 1) - 2 = 0 \Longleftrightarrow \ln(x + 1) = 2$

antécédents

Exo 13 : $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;\,20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?



$h = y_{maxi} - y_{mini}$ *trouvés dans le tableau de variation*

$f\,'(x) = \ln(x + 1) - 2$

$f\,'(x) = 0 \iff \ln(x + 1) - 2 = 0 \iff \ln(x + 1) = 2$

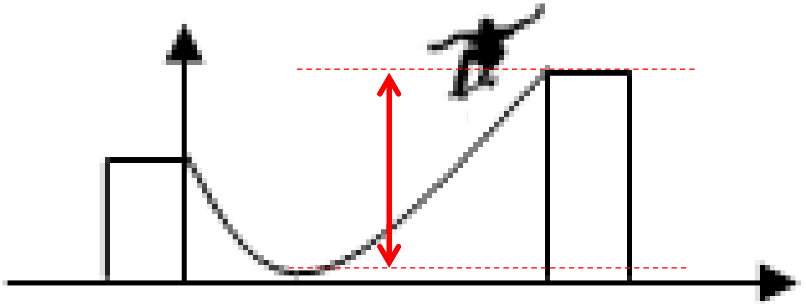
antécédents

$\iff e^{\ln(x + 1)} = e^2$ car la fct exponentielle est str. croissante sur $\mathbb{R}$

images

Exo 13 : $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?



$h = y_{maxi} - y_{mini}$ *trouvés dans le tableau de variation*

$f'(x) = \ln(x + 1) - 2$

$f'(x) = 0 \iff \ln(x + 1) - 2 = 0 \iff \ln(x + 1) = 2$

antécédents

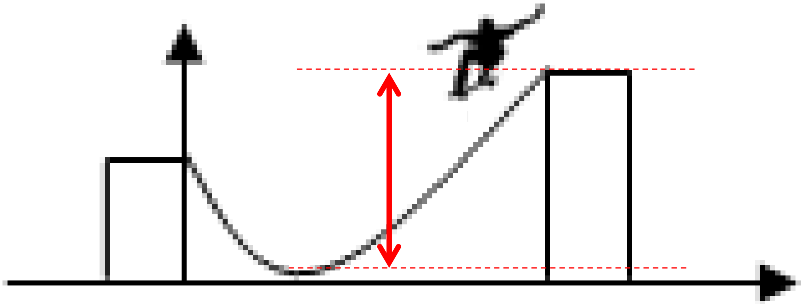
$\iff e^{\ln(x + 1)} = e^2$ car la fct exponentielle est str. croissante sur $\mathbb{R}$

images

$\iff x + 1 = e^2$ car $e^{\ln(u)} = u$ pour tout $u > 0$

Exo 13 : $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;\,20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?



$h = y_{maxi} - y_{mini}$ *trouvés dans le tableau de variation*

$f'(x) = \ln(x + 1) - 2$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x + 1) - 2 = 0 \Longleftrightarrow \ln(x + 1) = 2$

antécédents

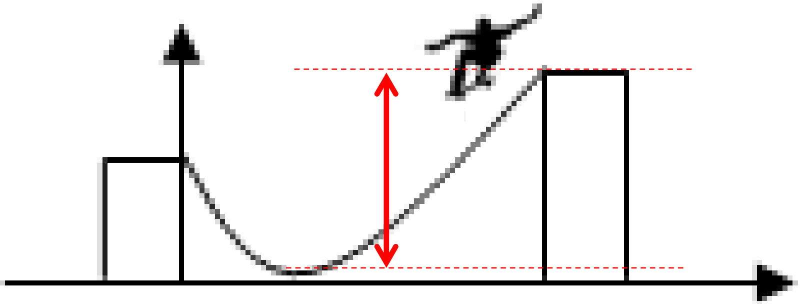
$\Longleftrightarrow e^{\ln(x + 1)} = e^2$ car la fct exponentielle est str. croissante sur $\mathbb{R}$

images

$\Longleftrightarrow x + 1 = e^2$ car $e^{\ln(u)} = u$ pour tout $u > 0$ $\Longleftrightarrow x = e^2 - 1$

Exo 13 : $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?



$h = y_{maxi} - y_{mini}$ *trouvés dans le tableau de variation*

$f'(x) = \ln(x+1) - 2$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x+1) - 2 = 0 \Longleftrightarrow \ln(x+1) = 2$

antécédents

$\Longleftrightarrow e^{\ln(x+1)} = e^2$ car la fct exponentielle est str. croissante sur $\mathbb{R}$

images

$\Longleftrightarrow x + 1 = e^2$ car $e^{\ln(u)} = u$ pour tout $u > 0$ $\Longleftrightarrow x = e^2 - 1$

$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow \ln(x+1) - 2 < 0 \Longleftrightarrow \ln(x+1) < 2$

antécédents

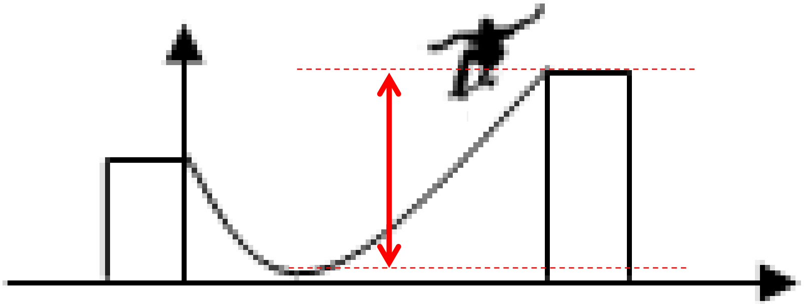
$\Longleftrightarrow e^{\ln(x+1)} < e^2$ car la fct exponentielle est str. croissante sur $\mathbb{R}$

images

$\Longleftrightarrow x + 1 < e^2$ car $e^{\ln(u)} = u$ pour tout $u > 0$ $\Longleftrightarrow x < e^2 - 1$

Exo 13 : $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?

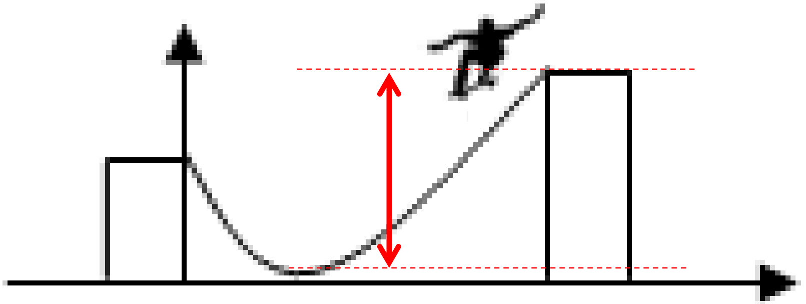


$f'(x) = \ln(x+1) - 2$

x	0		$e^2 - 1$		20
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f(x)$					

Exo 13 : $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?

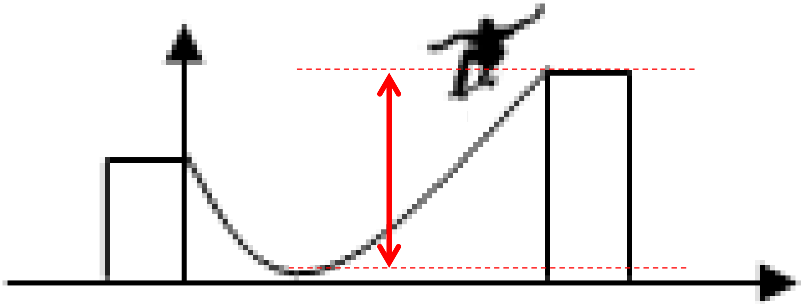


$f\,'(x) = \ln(x+1) - 2$

x	0		$e^2 - 1$		20
$f\,'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exo 13 : $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?



$f'(x) = \ln(x+1) - 2$

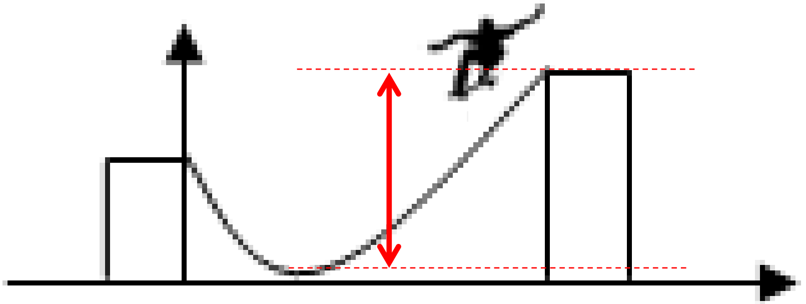
x	0		$e^2 - 1$		20
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f(x)$	5	$\searrow$	$\approx 0{,}61$	$\nearrow$	$\approx 8{,}93$

$f(0) = 0 - 0 + 5 = 5$ $\qquad f(e^2 - 1) = e^2\ln(e^2) - 3(e^2 - 1) + 5 \approx 0{,}61$

$f(20) = 21\ln(21) - 60 + 5 \approx 8{,}93$

Exo 13 : $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - 3x + 5$ sur $[\,0\,;\,20\,]$

Quelle est la hauteur totale du module ?



$f\,'(x) = \ln(x + 1) - 2$

x	0		$e^2 - 1$		20
$f\,'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
$f(x)$	5	$\searrow$	$\approx 0{,}61$	$\nearrow$	$\approx 8{,}93$

$h = y_{maxi} - y_{mini} \approx 8{,}93 - 0{,}61 \approx \mathbf{8{,}32}$ (m)