

Exercice 4 :

Résolvez

$$3x^2 - 6x + 3$$

$$\leq 0$$

$$(-2x^2 - 2x + 12)(3x^2 + x + 7)$$

$$3x^2 - 6x + 3$$

Méthode :
$$\frac{A}{B \times C} \leq 0$$

$D = \frac{A}{B \times C}$ On étudie les **signes** de **A**, **B**, **C**.
On en déduit les signes de **D**.

x	$-\infty$	$+\infty$
A		
B		
C		
D		

On veut **D** ≤ 0 donc **x** est dans **S** = ...

Je nomme $A = 3x^2 - 6x + 3$ $B = -2x^2 - 2x + 12$

$C = 3x^2 + x + 7$ et $D = A/(BC)$

Signes de A : $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(3)(3) = 36 - 36 = 0$

$$\Delta = 0 \text{ donc une racine } \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(3)} = 1$$

et le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$

Signes de B : ...

Signes de C : ...

Je nomme $A = 3x^2 - 6x + 3$ $B = -2x^2 - 2x + 12$

$C = 3x^2 + x + 7$ et $D = A/(BC)$

Signes de A : $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(3)(3) = 36 - 36 = 0$
 $-b \quad -(-6)$

$\Delta = 0$ donc une racine $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(3)} = 1$

et le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$

Signes de B : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(-2)(12) = 100 = 10^2$

$\Delta > 0$ donc deux racines

$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + 10}{2(-2)} = -3$ et $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 10}{-4} = 2$

et le polynôme est du signe de $a = -2 < 0$

à l'extérieur des racines.

Je nomme $A = 3x^2 - 6x + 3$ $B = -2x^2 - 2x + 12$

$C = 3x^2 + x + 7$ et $D = A/(BC)$

Signes de A : $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(3)(3) = 0$

$\Delta = 0$ donc une racine ... = **1**

et le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$

Signes de B : $\Delta = (-2)^2 - 4(-2)(12) = 100 = 10^2$

$\Delta > 0$ donc deux racines ... = **-3** et ... = **2**

et le polynôme est du signe de $a = -2 < 0$

à l'extérieur des racines.

Signes de C : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(3)(7) = -83$

$\Delta < 0$ donc pas de racine

et le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$

$A = 3x^2 - 6x + 3$ racine 1

$B = -2x^2 - 2x + 12$ racines -3 et 2

$C = 3x^2 + x + 7$ pas de racines

x	$-\infty$	$+\infty$
A		
B	-	
C		
D		

$A = 3x^2 - 6x + 3$ racine 1

$B = -2x^2 - 2x + 12$ racines -3 et 2

$C = 3x^2 + x + 7$ pas de racines

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
A			0		
B		0		0	-
C					
D					

$A = 3x^2 - 6x + 3$ racine 1

et le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$

$B = -2x^2 - 2x + 12$ racines -3 et 2

et le polynôme est du signe de $a = -2 < 0$
à l'extérieur des racines.

$C = 3x^2 + x + 7$ pas de racines

et le polynôme est du signe de $a = 1 > 0$

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
A			0		
B		0		0	-
C					
D					

$A = 3x^2 - 6x + 3$ racine 1

et le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$

$B = -2x^2 - 2x + 12$ racines -3 et 2

et le polynôme est du signe de $a = -2 < 0$
à l'extérieur des racines.

$C = 3x^2 + x + 7$ pas de racines

et le polynôme est du signe de $a = 1 > 0$

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
A	+		0	+	+	
B	-	0	+	+	0	-
C	+		+	+	+	+
D						

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
A	+		0	+	+	
B	-	0	+	+	0	-
C	+		+	+		+
D						

B et C sont au dénominateur,
on ne peut pas diviser par 0, donc toutes leurs
racines deviennent des ...

x	$-\infty$	- 3	1	2	$+\infty$	
A	+		0	+	+	
B	-	0	+	+	0	-
C	+		+	+		+
D						

B et C sont au dénominateur,
on ne peut pas diviser par 0, donc toutes leurs
racines deviennent des **valeurs interdites**

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$		
A	+		0	+	+		
B	-	0	+	+	0	-	
C	+		+	+	+	+	
D	-		+	0	+		-

B et C sont au dénominateur,
on ne peut pas diviser par 0, donc toutes leurs
racines deviennent des **valeurs interdites**

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
A	+		0	+	+	
B	-	0	+	+	0	-
C	+		+	+		+
D	-		+	0	+	-

On veut $D \leq 0$

Les solutions x correspondantes sont dans

$$S =] - \infty ; - 3 [\cup \{ 1 \} \cup] 2 ; + \infty [$$

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$		
A	+		0	+	+		
B	-	0	+	+	0	-	
C	+		+	+		+	
D	-		+	0	+		-

On veut $D \leq 0$

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
A	+		0	+	+	
B	-	0	+	+	0	-
C	+		+	+	+	+
D	-		+	0	+	-

On veut $D \leq 0$

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
A	+		0	+	+	
B	-	0	+	+	0	-
C	+		+	+	+	+
D	-		+	0	+	-

On veut $D \leq 0$

Les solutions x correspondantes sont dans

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
A	+		0	+	+	
B	-	0	+	+	0	-
C	+		+	+		+
D	-		+	0	+	-

On veut $D \leq 0$

Les solutions x correspondantes sont dans

$$S =] - \infty ; - 3 [\cup \{ 1 \} \cup] 2 ; + \infty [$$

Exercice 5 :

Soit la fonction f définie sur $[-5 ; 3]$

$$\text{par } f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12$$

Déterminez ses extremums.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12 \text{ sur } [-5 ; 3]$$

1°) Sens de variations :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' + 3(x^2)' + (-24x + 12)' \\ &= (3x^2) + 3(2x) + (-24) \\ &= 3x^2 + 6x - 24 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12 \text{ sur } [-5 ; 3]$$

1°) Sens de variations :

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$$

$$\text{Signes de } f' : \Delta = 6^2 - 4(3)(-24) = 324 = 18^2$$

$\Delta > 0$ donc deux racines

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12 \text{ sur } [-5 ; 3]$$

1°) Sens de variations :

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$$

$$\text{Signes de } f' : \Delta = 6^2 - 4(3)(-24) = 324 = 18^2$$

$\Delta > 0$ donc deux racines

$$\frac{-6 + \sqrt{324}}{2(3)} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{-6 - \sqrt{324}}{2(3)} = -4$$

????

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12 \text{ sur } [-5 ; 3]$$

1°) Sens de variations :

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$$

$$\text{Signes de } f' : \Delta = 6^2 - 4(3)(-24) = 324 = 18^2$$

$\Delta > 0$ donc deux racines

$$\frac{-6 + \sqrt{324}}{2(3)} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{-6 - \sqrt{324}}{2(3)} = -4$$

valeur exactes ?

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12 \text{ sur } [-5 ; 3]$$

1°) Sens de variations :

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$$

$$\text{Signes de } f' : \Delta = 6^2 - 4(3)(-24) = 324 = 18^2$$

$\Delta > 0$ donc deux racines

$$\frac{-6 + 18}{2(3)} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{-6 - 18}{2(3)} = -4$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12 \text{ sur } [-5 ; 3]$$

1°) Sens de variations :

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$$

$$\text{Signes de } f' : \Delta = 6^2 - 4(3)(-24) = 324 = 18^2$$

$\Delta > 0$ donc deux racines

$$\frac{-6 + 18}{2(3)} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{-6 - 18}{2(3)} = -4$$

Le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$

à l'extérieur des racines

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12 \text{ sur } [-5 ; 3]$$

$$2^\circ) f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$$

Racines 2 et - 4 et le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$ à l'extérieur des racines.

x	- 5	-4	2	3	
f '(x)	+	0	-	0	+
f (x)					

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12 \text{ sur } [-5 ; 3]$$

$$2^\circ) f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$$

Racines 2 et -4 et le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$ à l'extérieur des racines.

x	- 5	-4	2	3	
f '(x)	+	0	-	0	+
f (x)					

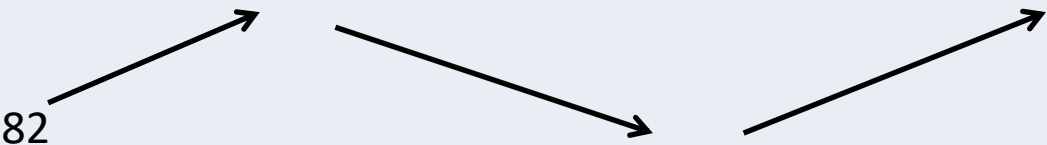
par le **théorème de la monotonie**

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12 \text{ sur } [-5 ; 3]$$

$$f(-5) = (-5)^3 + 3(-5)^2 - 24(-5) + 12$$

$$= -125 + 75 + 120 + 12 = 207 - 125 = 82$$

x	-5	-4		2		3
f'(x)	+	0	-	0	+	
f(x)	82					



$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12 \text{ sur } [-5 ; 3]$$

$$f(-5) = (-5)^3 + 3(-5)^2 - 24(-5) + 12$$

$$= -125 + 75 + 120 + 12 = 207 - 125 = 82$$

Même méthode pour les autres images.

x	-5	-4		2		3
f'(x)	+	0	-	0	+	
f(x)	82	92		-16		-6

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12 \text{ sur } [-5 ; 3]$$

$$f(-5) = (-5)^3 + 3(-5)^2 - 24(-5) + 12$$

$$= -125 + 75 + 120 + 12 = 207 - 125 = 82$$

Même méthode pour les autres images.

x	-5	-4		2		3
f'(x)	+	0	-	0	+	
f(x)	82	92		-16		-6

$92 > -6 \Rightarrow$ **Maximum 92** atteint en -4

$-16 < 82 \Rightarrow$ **Minimum -16** atteint en 2

Exercice 6 :

Soit la fonction f

définie sur $[-1; 4]$

par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1°) Déterminez ses extremums.

2°) Déduisez-en ses signes.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$

1°) Déterminez ses extremums
grâce à ses sens de variation.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' - 6(x^2)' + (9x)' \\ &= (3x^2) - 6(2x) + (9) \\ &= 3x^2 - 12x + 9 \end{aligned}$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$

1°) Déterminez ses sens de variation.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$\text{Signes de } f' : \Delta = (-12)^2 - 4(3)(9) = 36 = 6^2$$

$\Delta > 0$ donc deux racines

$$\frac{-(-12) + 6}{2(3)} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{-(-12) - 6}{2(3)} = 1$$

Le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$

à l'extérieur des racines

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$

1°) Déterminez ses sens de variation.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Racines 3 et 1 et le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$ à l'extérieur des racines

x	- 1	1	3	4	
f '(x)	+	0	-	0	+

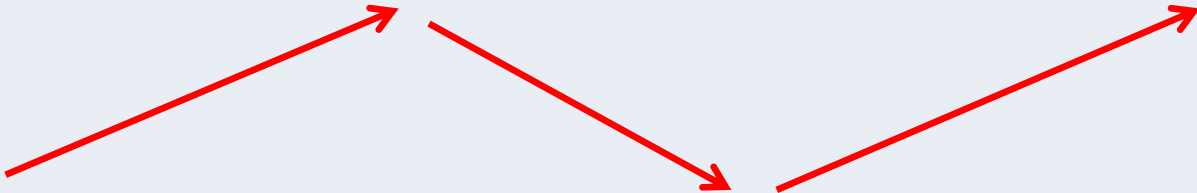
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$

On en déduit les sens de variation de f grâce au théorème de la monotonie :

x	- 1	1	3	4	
f '(x)	+	0	-	0	+

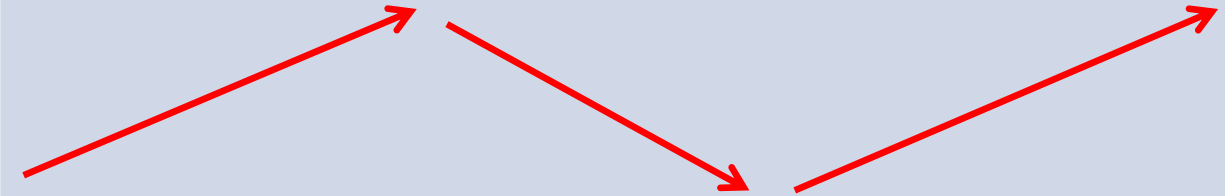
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$

On en déduit les sens de variation de f grâce au théorème de la monotonie :

x	-1	1	3	4	
f '(x)	+	0	-	0	+
f(x)					

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$

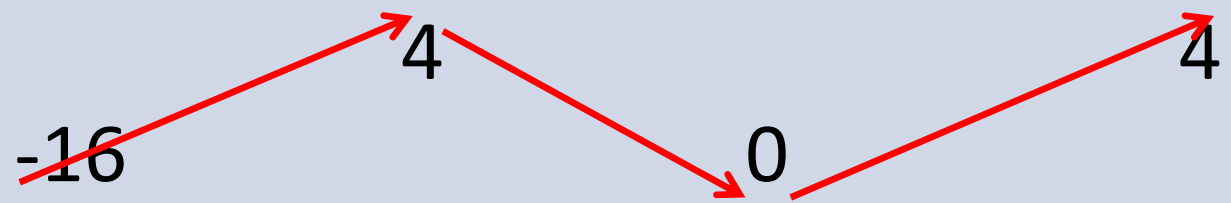
On en déduit les **extremums de f** grâce aux
extremums locaux **sur les intervalles de**
monotonie :

x	-1	1	3	4
f(x)				

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$

On en déduit les **extremums de f** grâce aux
extremums locaux **sur les intervalles de**
monotonie :

x	-1	1	3	4
f(x)	-16	4	0	4



$$f(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 9(1) = -1 - 6 - 9 = -16$$

Même méthode pour les autres.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$

On en déduit les **extremums de f** grâce aux
extremums locaux **sur les intervalles de**
monotonie :

x	-1	1	3	4
f(x)	-16	4	0	4

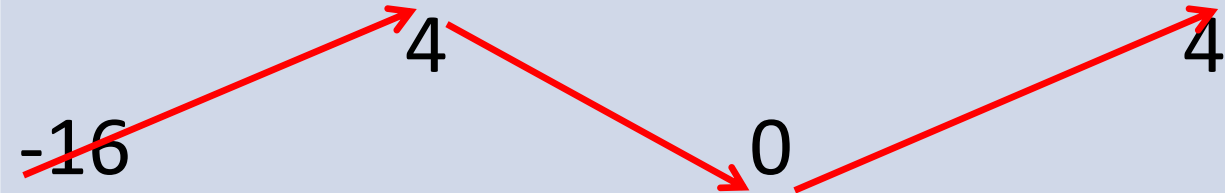
$4 = 4 \Rightarrow$ Maximum **4** atteint en 1 et 4

$-16 < 0 \Rightarrow$ Minimum **-16** atteint en -1

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$

2°) On en déduit les signes de f grâce aux extremums locaux sur les intervalles de monotonie :

x	-1	1	3	4
f(x)	-16	4	0	4



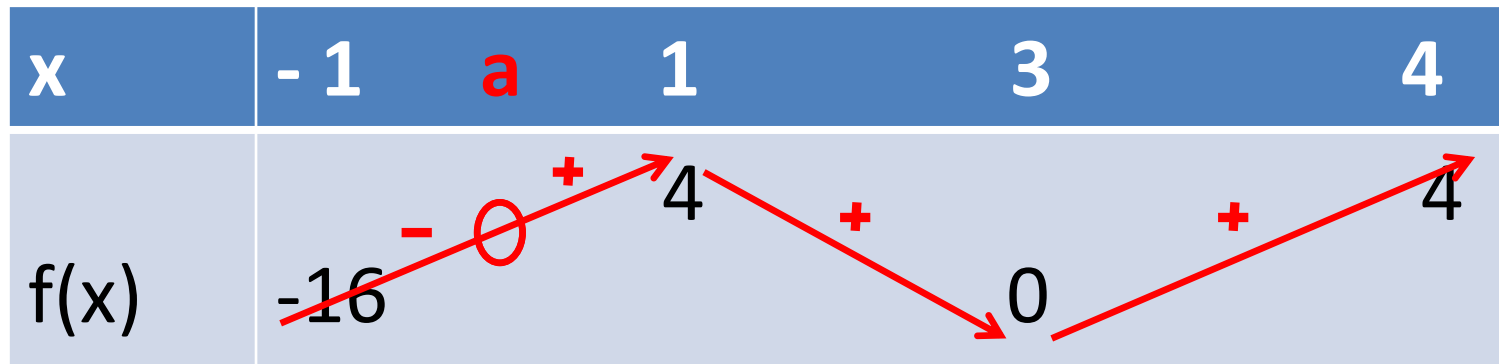
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$

2°) On en déduit les signes de f grâce aux extremums locaux sur les intervalles de monotonie :

x	-1	a	1	3	4
f(x)	-16	-	0	+	4

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$

2°) On en déduit les signes de f grâce aux extremums locaux sur les intervalles de monotonie :



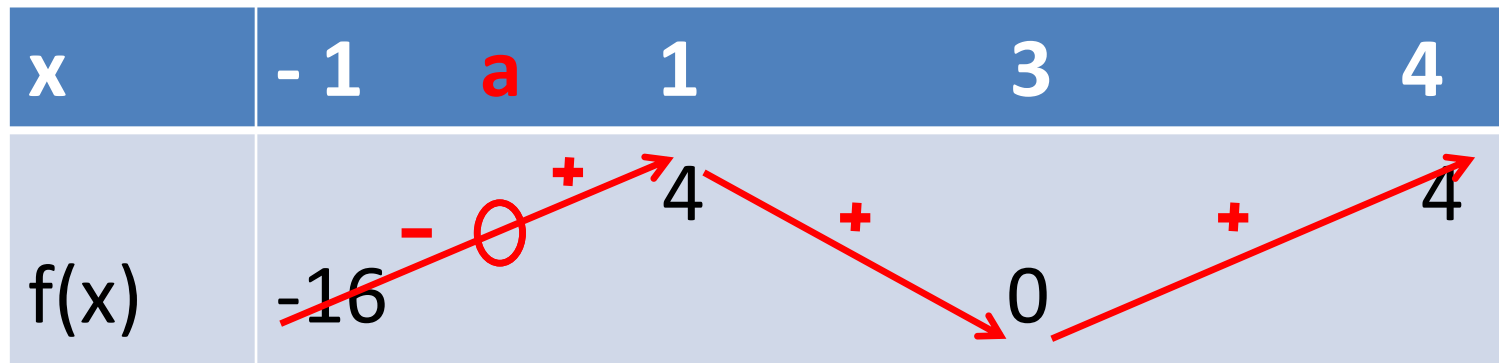
Sur $[-1; 1]$ il existe un unique a tel que $f(a) = 0$

Sur $[-1; a]$ $f(x) < 0$ Sur $]a; 1]$ $f(x) > 0$

Sur $[1; 3]$ $f(x) > 0$

Sur $]3; 4]$ $f(x) > 0$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$



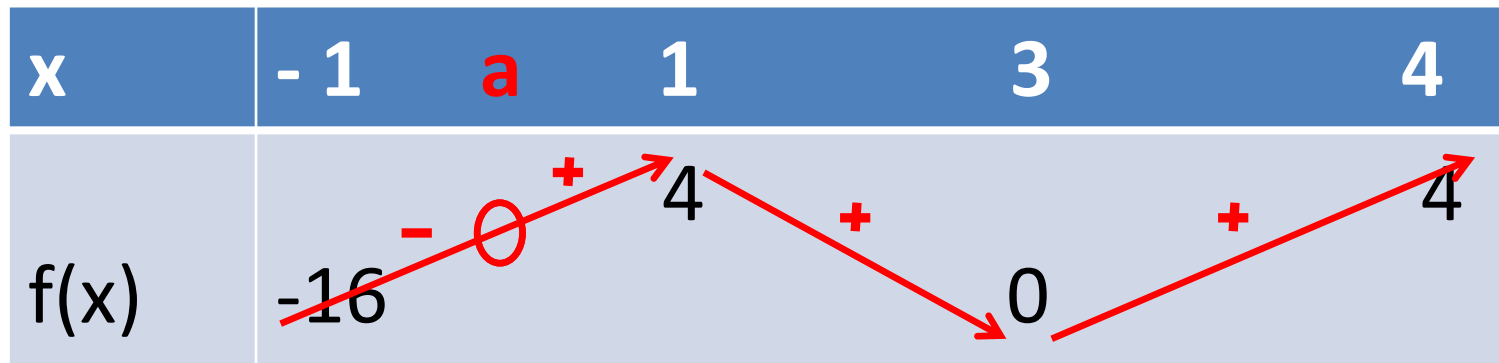
Pour les signes il ne manque plus que la valeur numérique de **a**.

$$f(a) = 0 \iff a^3 - 6a^2 + 9a = 0$$

impossible à résoudre (polynôme degré 3)

On utilise sa calculatrice (graphique, tableur, équations) : elle affiche ...

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$



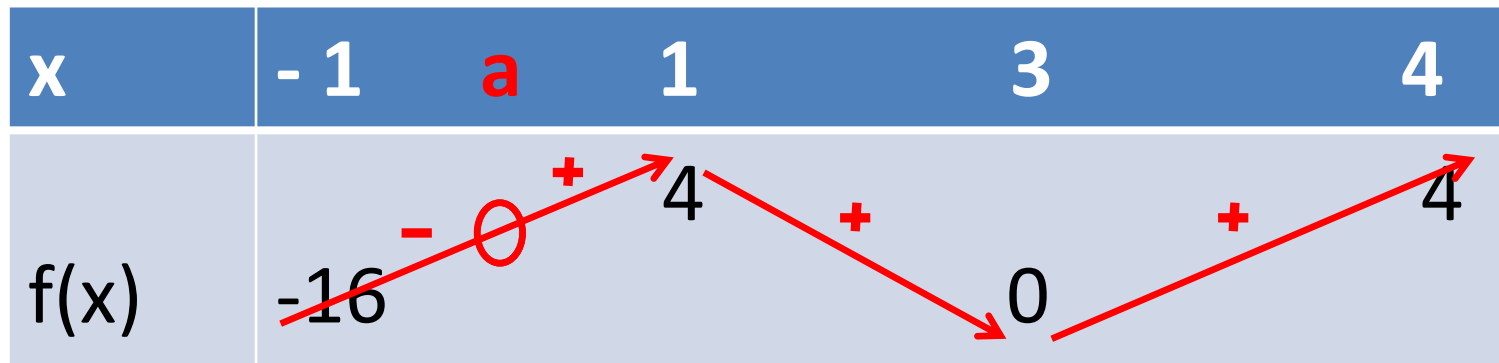
Pour les signes il ne manque plus que la valeur numérique de **a**.

$$f(a) = 0 \iff a^3 - 6a^2 + 9a = 0$$

impossible à résoudre (polynôme degré 3)

On utilise sa calculatrice (graphique, tableur, équations) : elle affiche **0** mais ...

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$



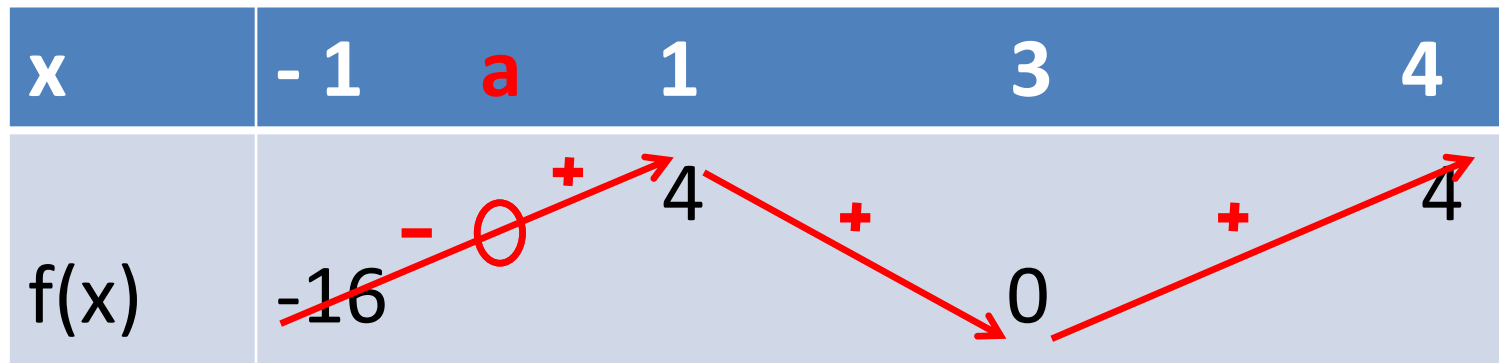
Pour les signes il ne manque plus que la valeur numérique de **a**.

$$f(a) = 0 \iff a^3 - 6a^2 + 9a = 0$$

impossible à résoudre (polynôme degré 3)

On utilise sa calculatrice (graphique, tableur, équations) : elle affiche **0** mais on ne sait pas si c'est une valeur exacte. Méthode : ...

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$



Pour les signes il ne manque plus que la valeur numérique de **a**.

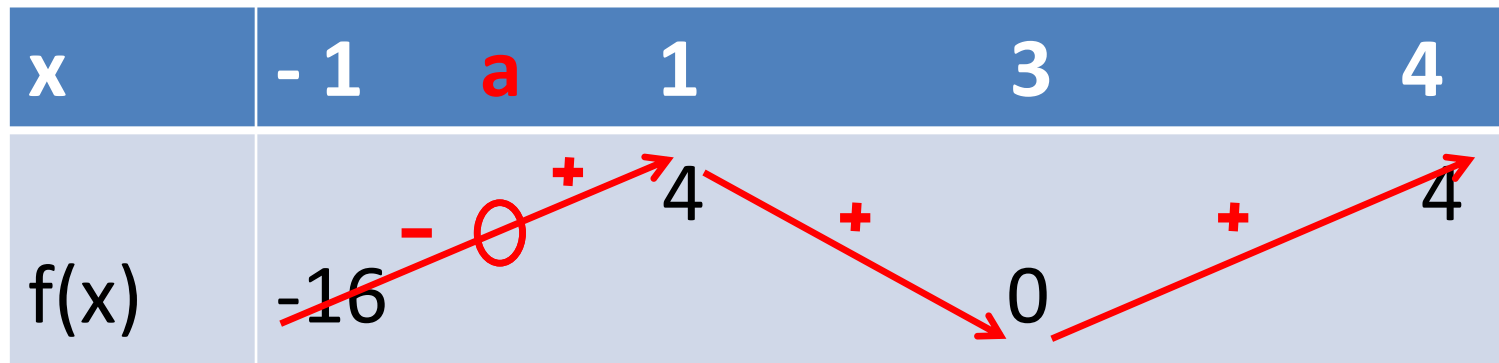
$$f(a) = 0 \iff a^3 - 6a^2 + 9a = 0$$

impossible à résoudre (polynôme degré 3)

On utilise sa calculatrice (graphique, tableur, équations) : elle affiche **0** mais on ne sait pas si c'est une valeur exacte.

Méthode : $f(0) = 0$ ou $f(0) \approx 0$?

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$



Pour les signes il ne manque plus que la valeur numérique de **a**.

$$f(a) = 0 \iff a^3 - 6a^2 + 9a = 0$$

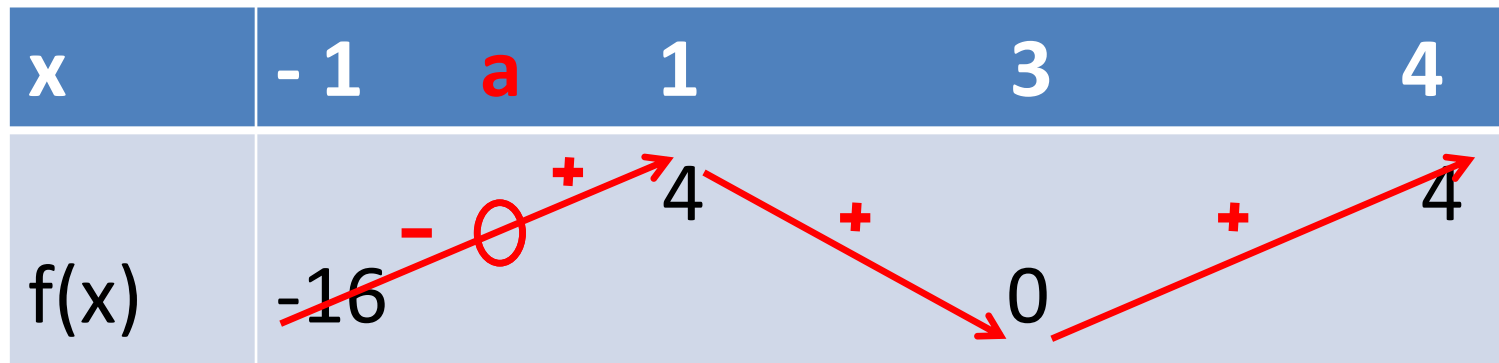
impossible à résoudre (polynôme degré 3)

On utilise sa calculatrice (graphique, tableur, équations) : elle affiche **0** mais on ne sait pas si c'est une valeur exacte.

Méthode : $f(0) = 0$ ou $f(0) \approx 0$?

$$f(0) = 0^3 - 6(0^2) + 9(0) = 0 \quad \text{donc} \quad a = 0$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$



Pour les signes il ne manque plus que la valeur numérique de **a**.

Dans cet exo, la bonne méthode est l'algèbre :

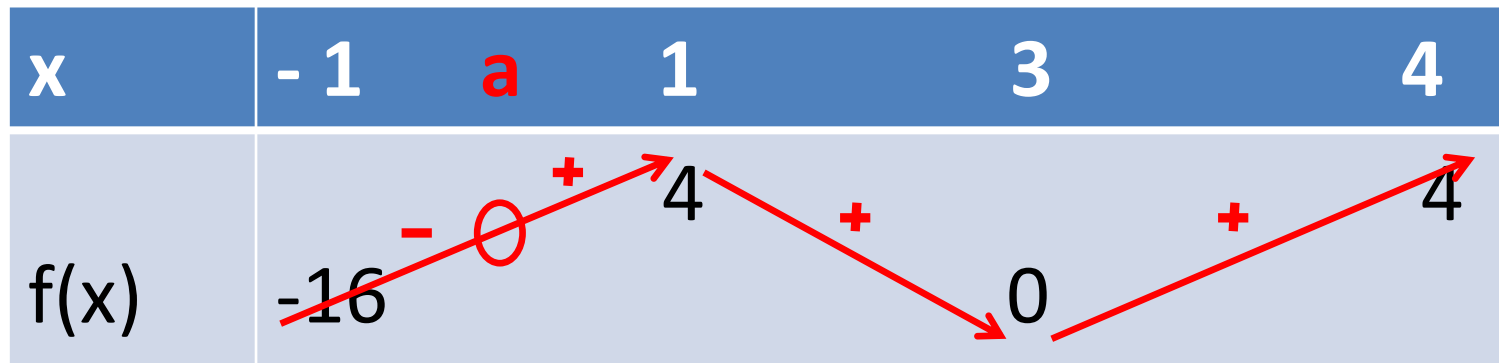
$$f(a) = 0 \iff a^3 - 6a^2 + 9a = 0$$

$$\iff a (a^2 - 6a + 9) = 0 \iff a (a - 3)^2 = 0$$

$$\iff a = 0 \quad \text{ou} \quad a = 3 \text{ (déjà connu)}$$

(l'utilisation de la calculatrice imparfaite n'est pas la meilleure méthode mathématique)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$



$$f(a) = 0 \iff a^3 - 6a^2 + 9a = 0$$

$$\iff a(a^2 - 6a + 9) = 0 \iff a(a - 3)^2 = 0$$

$$\iff a = 0 \quad \text{ou} \quad a = 3 \text{ (déjà connu)}$$

x	-1	0	3	4	
f(x)	-	0	+	0	+

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad \text{sur } [-1; 4]$$

Vérification (facultative) à la calculatrice graphique :

