Exercice 3 :

1°) Déterminez les limites de la fonction

définie sur $] 0 ; + \infty [$ par $f(x) = 3x^2 + 15 - 24 \ln(x)$

2°) Déterminez ses sens de variation et ses signes.

Exercice 3 :

1°) Déterminez les limites de la fonction

définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$

$x \to 0^+$ $f(x) \to \ldots ?$

$x \to +\infty$ $f(x) \to \ldots ?$

1°) limites de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24 \ln(x)$ définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$

$x \to 0^+$ $\quad 3x^2 + 15 \to \ldots \quad \ln(x) \to \ldots \quad \Rightarrow \quad f(x) \to \ldots$

1°) limites de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24 \ln(x)$ définie sur $] 0 ; + \infty [$

$x \to 0^+$ $\quad 3x^2 + 15 \to 15$ $\quad \ln(x) \to -\infty$ $\quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$

1°) limites de $f(x) = 3x^2 + 15 – 24 \ln(x)$ définie sur $]\, 0 \,;\, + \infty \,[$

$x \to 0^+$ $3x^2 + 15 \to 15$ $\ln(x) \to - \infty$ ⟹ $f(x) \to + \infty$

$x \to + \infty$ $3x^2 + 15 \to ...$ $\ln(x) \to ...$

⟹ $f(x) \to ...$

1°) limites de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$ définie sur $]\ 0\ ;+\infty\ [$

$x \to 0^+$ $\quad 3x^2 + 15 \to 15$ $\quad \ln(x) \to -\infty$ $\quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ $\quad 3x^2 + 15 \to +\infty$ $\quad \ln(x) \to +\infty$

$\Rightarrow \quad f(x) \to$ indéterminée

1°) limites de $f(x) = 3x^2 + 15 – 24 \ln(x)$ définie sur $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$

$x \to 0^+$ $\quad 3x^2 + 15 \to 15$ $\quad \ln(x) \to -\infty$ $\Rightarrow$ $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ $\quad 3x^2 + 15 \to +\infty$ $\quad \ln(x) \to +\infty$

$\Rightarrow$ $f(x) \to$ indéterminée

Par croissances comparées $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2°) Déterminez les sens de variation de la fonction

définie sur $] 0 ; +\infty [$ par $f(x) = 3x^2 + 15 - 24 \ln(x)$

$f'(x) = 3 (x^2)' + (0x + 15)' - 24 (\ln(x))'$

Déterminez les sens de variation de la fonction

définie sur $] 0 ; +\infty [$ par $f(x) = 3x^2 + 15 - 24 \ln(x)$

$$f'(x) = 3 (x^2)' + (0x + 15)' - 24 (\ln(x))'$$

$$= 3 (2x) + 0 - 24 \frac{1}{x}$$

Déterminez les sens de variation de la fonction

définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$

$$f'(x) = 3\,(\,x^2\,)' + (\,0x + 15\,)' - 24\,(\,\ln(x)\,)'$$

$$= 3\,(\,2x\,) + 0 - 24\,\frac{1}{x} = 6x - \frac{24}{x}$$

Déterminez les sens de variation de la fonction

définie sur $] 0 ; +\infty [$ par $f(x) = 3x^2 + 15 - 24 \ln(x)$

$$f'(x) = 3 (x^2)' + (0x + 15)' - 24 (\ln(x))'$$

$$= 3 (2x) + 0 - 24 \frac{1}{x} = 6x - \frac{24}{x} = \frac{6x^2 - 24}{x}$$

Déterminez les sens de variation de la fonction

définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$

$$f'(x) = 3\,(\,x^2\,)' + (\,0x + 15\,)' - 24\,(\,\ln(x)\,)'$$

$$= 3\,(\,2x\,) + 0 - 24\,\frac{1}{x} = 6x - \frac{24}{x} = \frac{6x^2 - 24}{x}$$

$$= \frac{6\,(\,x^2 - 4\,)}{x}$$

Déterminez les sens de variation de la fonction

définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$

$$f'(x) = 3\,(x^2)' + (0x + 15)' - 24\,(\ln(x))'$$

$$= 3\,(2x) + 0 - 24\,\frac{1}{x} = 6x - \frac{24}{x} = \frac{6x^2 - 24}{x}$$

$$= \frac{6\,(x^2 - 4)}{x} = \frac{6\,(x - 2)\,(x + 2)}{x}$$

sens de variation de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$f'(x) = \frac{6(x-2)(x+2)}{x}$$

x	0		$+\infty$
$x-2$			
$x+2$			
x			
$f'(x)$			
$f(x)$			

sens de variation de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$ sur $]0\,;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{6(x-2)(x+2)}{x}$$

x	0		2		$+\infty$
$x-2$	‖	$-$	0	$+$	
$x+2$	‖	$+$		$+$	
x	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖				
$f(x)$	‖				

sens de variation de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$f'(x) = \frac{6(x-2)(x+2)}{x}$$

x	0		2		$+\infty$
$x-2$	‖	$-$	0	$+$	
$x+2$	‖	$+$		$+$	
x	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖				

sens de variation de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$f'(x) = \frac{6\,(x-2)\,(x+2)}{x}$$

x	0		2		$+\infty$
$x-2$	‖	$-$	0	$+$	
$x+2$	‖	$+$		$+$	
x	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

signes de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$ sur $]\, 0\, ;\, +\infty\, [$

impossible de résoudre $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x) = 0$

signes de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

impossible de résoudre $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x) = 0$

signes de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$
	‖		$\approx 10{,}36$		

$f(2) = 27 - 24\ln(2)$

$\approx 10{,}36$

à la calculatrice

impossible de résoudre $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x) = 0$

signes de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘ $+$	$\approx 10,36$	↗	$+\infty$

$f(2) = 27 - 24\ln(2)$

$\approx 10,36$

à la calculatrice

impossible de résoudre $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x) = 0$

Grâce aux **monotonies** :

Sur $]\,0\,;2\,]$ $f(x) \geq f(2) \approx 10,36 > 0$ ⇒ $f(x) > 0$

signes de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24 \ln(x)$ sur $] 0 ; + \infty [$

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$ +	$\approx 10{,}36$	$\nearrow$ +	$+\infty$

$f(2) = 27 - 24 \ln(2)$

$\approx 10{,}36$

à la calculatrice

impossible de résoudre $f(x) = 3x^2 + 15 - 24 \ln(x) = 0$

Grâce aux **monotonies** :

Sur $] 0 ; 2]$ $f(x) \geq f(2) \approx 10{,}36 > 0$ $\Rightarrow$ $f(x) > 0$

Sur $[2 ; + \infty [$ $f(x) \geq f(2) \approx 10{,}36 > 0$ $\Rightarrow$ $f(x) > 0$

signes de $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	$+$ ↘	$\approx 10{,}36$	$+$ ↗	$+\infty$

$f(2) = 27 - 24\ln(2)$

$\approx 10{,}36$

à la calculatrice

impossible de résoudre $f(x) = 3x^2 + 15 - 24\ln(x) = 0$

Grâce aux **monotonies** :

Sur $]\,0\,;2\,]$ $f(x) \geq f(2) \approx 10{,}36 > 0$ ⇒ $f(x) > 0$

Sur $[\,2\,;+\infty\,[$ $f(x) \geq f(2) \approx 10{,}36 > 0$ ⇒ $f(x) > 0$

Réponse :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	

Exercice 4 :

1°) Déterminez les limites de la fonction

définie sur $]\, 0\, ;+\infty\, [$ par $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$

2°) Déterminez ses sens de variation et ses signes.

1°) limites de $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$ définie sur $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$

$x \to 0^+$ $\quad$ $8x^2 - 8 \to \ldots$ $\quad$ $\ln(x) \to \ldots$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $f(x) \to \ldots$

1°) limites de $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$ définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$x \to 0^+$ $\quad 8x^2 - 8 \to -8 \quad \ln(x) \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$

1°) limites de $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$ définie sur $] 0 ; + \infty [$

$x \to 0^+$ $\quad 8x^2 - 8 \to -8$ $\quad \ln(x) \to -\infty$ $\quad \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ $\quad 8x^2 - 8 \to \ldots$ $\quad \ln(x) \to \ldots$

$\Rightarrow f(x) \to \ldots$

1°) limites de $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$ définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$x \to 0^+$ $\quad 8x^2 - 8 \to -8$ $\quad \ln(x) \to -\infty$ $\quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ $\quad 8x^2 - 8 \to +\infty$ $\quad \ln(x) \to +\infty$

$\Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$

Déterminez les sens de variation de la fonction

définie sur $] 0 ; +\infty [$ par $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$

$$f'(x) = 8 (x^2)' + (0x - 8)' + (\ln(x))'$$

$$= 8 (2x) + 0 + \frac{1}{x} = 16x + \frac{1}{x} = \frac{16x^2 + 1}{x}$$

x est dans $] 0 ; +\infty [$ $\Rightarrow$ $x > 0$

$x^2 > 0$ $\Rightarrow$ $16x^2 + 1 > 0$ $\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ sur $] 0 ; +\infty [$

$\Leftrightarrow$ f strictement croissante sur $] 0 ; +\infty [$

sens de variation de $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$f'(x) = \frac{16x^2 + 1}{x}$$

x	0 ‖		$+\infty$
$16x^2 + 1$	‖	$+$	
x	‖	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

signes de $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$ sur $] 0 ; +\infty [$

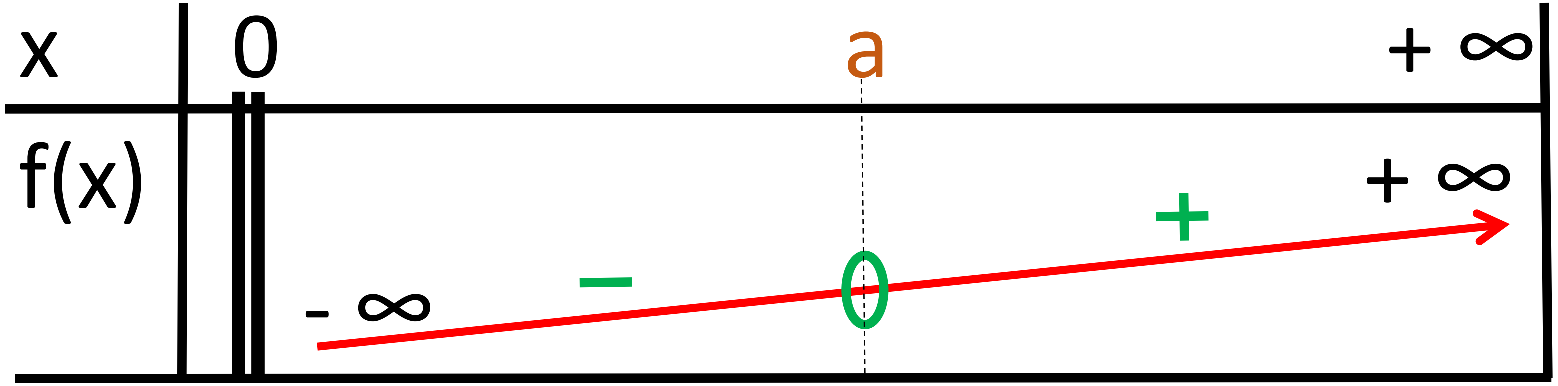
impossible de résoudre $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x) = 0$

signes de $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$ sur $]\, 0 \,;\, +\infty \,[$

x	0		$+\infty$
f(x)	‖	$-\infty$	$+\infty$

impossible de résoudre $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x) = 0$

signes de $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

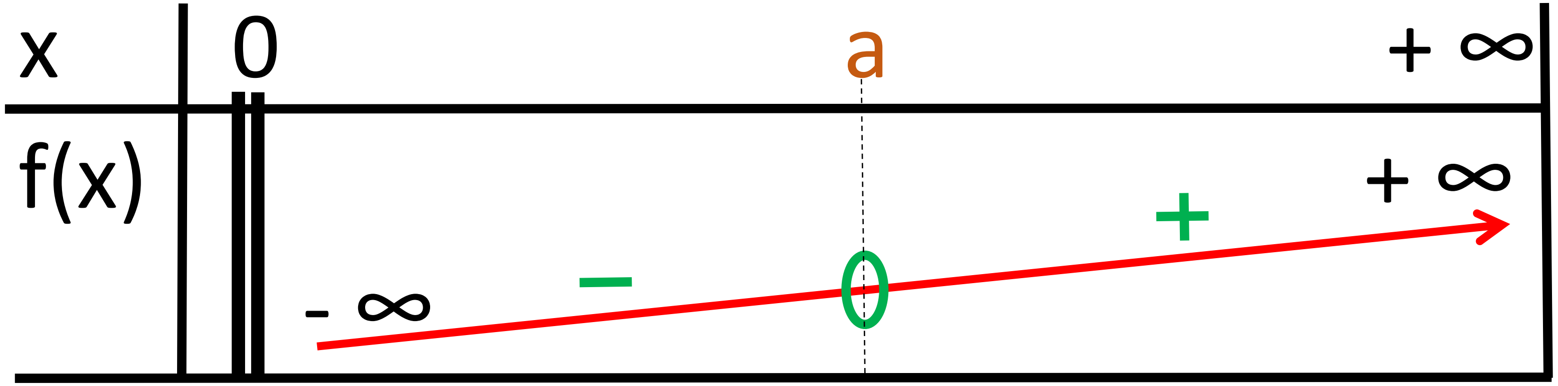


impossible de résoudre $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x) = 0$

Grâce à la **monotonie** : il existe un unique a tel que $f(a) = 0$

et sur $]-\infty\,;a\,[$ $f(x) < 0$ et sur $]\,a\,;+\infty\,[$ $f(x) > 0$

signes de $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$



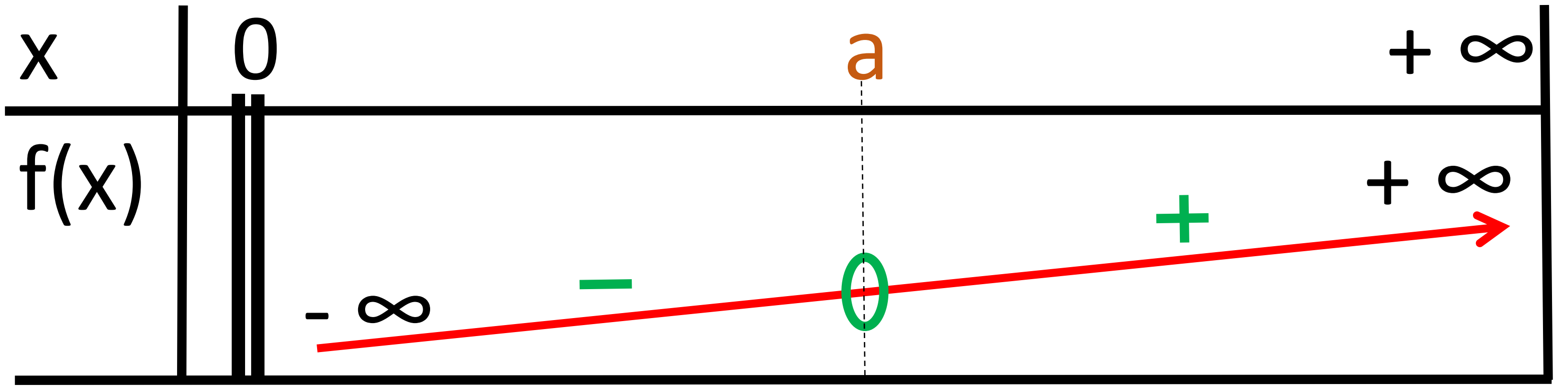
impossible de résoudre $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x) = 0$

Grâce à la **monotonie** : il existe un unique a tel que $f(a) = 0$

et sur $]\,-\infty\,;a\,[$ $f(x) < 0$ et sur $]\,a\,;+\infty\,[$ $f(x) > 0$

calculatrice : $a \approx 1$

signes de $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$



impossible de résoudre $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x) = 0$

Grâce à la **monotonie** : il existe un unique a tel que $f(a) = 0$

et sur $]-\infty\,;a\,[$ $f(x) < 0$ et sur $]\,a\,;+\infty\,[$ $f(x) > 0$

calculatrice : $a \approx 1$ $f(1) = 8(1^2) - 8 + \ln(1) = 8 - 8 + 0 = 0$ ⇒ $a = 1$

signes de $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x)$ sur $]0 ; +\infty[$

x	0			a		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$

impossible de résoudre $f(x) = 8x^2 - 8 + \ln(x) = 0$

Grâce à la **monotonie** : il existe un unique a tel que $f(a) = 0$

et sur $]-\infty ; a[$ $f(x) < 0$ et sur $]a ; +\infty[$ $f(x) > 0$

calculatrice : $a \approx 1$ $f(1) = 8(1^2) - 8 + \ln(1) = 8 - 8 + 0 = 0$ ⇒ $a = 1$

Réponse :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice 5 :

1°) Déterminez les limites de la fonction

définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 5 \ln(1 + x^2)$

2°) Déterminez ses sens de variation et ses signes.

1°) limites de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ définie sur $]-\infty\,;+\infty[$

$x \to -\infty$ $\quad$ $5x \to \ldots$ $\quad$ $1 + x^2 \to \ldots$

$\ln(1 + x^2) \to \ldots$ $\quad$ $f(x) \to \ldots$

1°) limites de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ définie sur $]-\infty\,;+\infty[$

$x \to -\infty$ $\quad$ $5x \to -\infty$ $\quad$ $1 + x^2 \to +\infty$

$\ln(1 + x^2) \to +\infty$ $\quad \Rightarrow \quad$ $f(x) \to -\infty$

1°) limites de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ définie sur $]-\infty ; +\infty[$

$x \to -\infty$ $\quad$ $5x \to -\infty$ $\quad$ $1 + x^2 \to +\infty$

$\ln(1 + x^2) \to +\infty$ $\quad \Rightarrow \quad$ $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ $\quad$ $5x \to \ldots$ $\quad$ $1 + x^2 \to \ldots$

$\ln(1 + x^2) \to \ldots$ $\quad \Rightarrow \quad$ $f(x) \to \ldots$

1°) limites de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ définie sur $]-\infty ; +\infty[$

$x \to -\infty$ $\quad$ $5x \to -\infty$ $\quad$ $1 + x^2 \to +\infty$

$\ln(1 + x^2) \to +\infty$ $\Rightarrow$ $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ $\quad$ $5x \to +\infty$ $\quad$ $1 + x^2 \to +\infty$

$\ln(1 + x^2) \to +\infty$ $\Rightarrow$ $f(x) \to$ indéterminée

1°) limites de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ définie sur $]-\infty\ ;+\infty[$

$x \to -\infty$ $\quad 5x \to -\infty$ $\quad 1 + x^2 \to +\infty$

$\ln(1 + x^2) \to +\infty$ $\quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ $\quad 5x \to +\infty$ $\quad 1 + x^2 \to +\infty$

$\ln(1 + x^2) \to +\infty$ $\quad \Rightarrow \quad f(x) \to$ indéterminée

Par *croissances comparées* $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2°) sens de variation de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = (5x)' - 5\left(\ln(1 + x^2)\right)' = 5 - 5\left(\ln(u)\right)'$$

$$\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \left(\ln(u)\right)' = \frac{1}{u} \times u'$$

$$f'(x) = 5 - 5\,\frac{1}{1 + x^2} \times (1 + x^2)' = 5 - 5\,\frac{1}{1 + x^2} \times (0 + 2x)$$

2°) sens de variation de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = (5x + 3)' - 5\,(\ln(1 + x^2))' = 5 - 5\,(\ln(u))'$$

$$= 5 - 5\,\frac{1}{u} \times u' = 5 - 5\,\frac{1}{1 + x^2}\,(1 + x^2)' = 5 - 5\,\frac{1}{1 + x^2}\,(0 + 2x)$$

$$= \frac{5\,(1 + x^2) - 5\,(2x)}{1 + x^2} = \frac{5\,(1 + x^2 - 2x)}{1 + x^2} = \frac{5\,(x - 1)^2}{1 + x^2}$$

sens de variation de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{5(x-1)^2}{1 + x^2}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
$1 + x^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

signes de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$

impossible de résoudre $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2) = 0$

signes de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		$+\infty$
	$-\infty$	

impossible de résoudre $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2) = 0$

signes de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$

impossible de résoudre $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2) = 0$

Grâce à la **monotonie** : il existe un unique a tel que $f(a) = 0$

et sur $]-\infty ; a[$ $f(x) < 0$ et sur $]a ; +\infty[$ $f(x) > 0$

signes de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$

impossible de résoudre $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2) = 0$

Grâce à la **monotonie** : il existe un unique a tel que $f(a) = 0$

et sur $]-\infty ; a[$ $f(x) < 0$ et sur $]a ; +\infty[$ $f(x) > 0$

calculatrice : $a \approx 0$

signes de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-$ ↗	0	$+$ ↗	$+\infty$

impossible de résoudre $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2) = 0$

Grâce à la **monotonie** : il existe un unique a tel que $f(a) = 0$

et sur $]-\infty\,;a[$ $f(x) < 0$ et sur $]a\,;+\infty[$ $f(x) > 0$

calculatrice : $a \approx 0$ $f(0) = 5(0) - 5\ln(1) = 0 - 0 = 0$ ⇨ $a = 0$

signes de $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$

impossible de résoudre $f(x) = 5x - 5\ln(1 + x^2) = 0$

Grâce à la **monotonie** : il existe un unique a tel que $f(a) = 0$

et sur $]-\infty\,;a[$ $f(x) < 0$ et sur $]a\,;+\infty[$ $f(x) > 0$

calculatrice : $a \approx 0$ $f(0) = 5(0) - 5\ln(1) = 0 - 0 = 0$ ⇒ $a = 0$

Réponse :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 5 bis :

1°) Déterminez les limites de la fonction

définie par

$$f(x) = 2x - 1 - \ln(2x)$$

2°) Déterminez ses sens de variation et ses signes.

1°) limites de $f(x) = 2x - 1 - \ln(2x)$

$f(x)$ existe si $2x > 0$ $\Longrightarrow$ f est définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$x \to 0^+$ $\quad 2x \to 0^+$ $\quad \ln(2x) \to -\infty$ $\Longrightarrow$ $f(x) \to +\infty$

$x \to +\infty$ $\quad 2x \to +\infty$ $\quad \ln(2x) \to +\infty$

$\Longrightarrow$ $f(x) \to$ indéterminée

Par *croissances comparées* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2°) sens de variation de f(x) = 2x – 1 – ln(2x) sur] 0 ; + ∞ [

$$f'(x) = (2x - 1)' - (\ln(2x))' = 2 - (\ln(u))'$$

$$= 2 - \frac{1}{u} \times u' = 2 - \frac{1}{2x}(2x)' = 2 - \frac{1}{2x}2$$

$$= 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$

sens de variation de $f(x) = 2x - 1 - \ln(2x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x}$$

x	0		$0,5$		$+\infty$
$2x-1$	‖	$-$	0	$+$	
x	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖				

sens de variation de $f(x) = 2x - 1 - \ln(2x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{x}$$

x	0		$0{,}5$		$+\infty$
$2x - 1$	‖	$-$	0	$+$	
x	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

signes de $f(x) = 2x - 1 - \ln(2x)$ sur $] 0 ; +\infty [$

Impossible de résoudre $2x - 1 - \ln(2x) = 0$

signes de $f(x) = 2x - 1 - \ln(2x)$ sur $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$

x	0		$0{,}5$		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Impossible de résoudre $2x - 1 - \ln(2x) = 0$

signes de $f(x) = 2x - 1 - \ln(2x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

x	0		$0{,}5$		$+\infty$
$f(x)$	$\parallel$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Impossible de résoudre $2x - 1 - \ln(2x) = 0$

$f(0{,}5) = 2\times0{,}5 - 1 - \ln(2\times0{,}5) = 1 - 1 - \ln(1) = 0 - 0 = 0$

signes de $f(x) = 2x - 1 - \ln(2x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

x	0		$0{,}5$		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$+$ $\searrow$	0	$+$ $\nearrow$	$+\infty$

Impossible de résoudre $2x - 1 - \ln(2x) = 0$

$f(0{,}5) = 2\times0{,}5 - 1 - \ln(2\times0{,}5) = 1 - 1 - \ln(1) = 0 - 0 = 0$

Grâce à la **monotonie** :

sur $]\,0\,;0{,}5\,[$ et sur $]\,0{,}5\,;+\infty\,[$ $f(x) > 0$

signes de $f(x) = 2x - 1 - \ln(2x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$

x	0		$0{,}5$		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	$+$ ↘	0	$+$ ↗	$+\infty$

Impossible de résoudre $2x - 1 - \ln(2x) = 0$

$f(0{,}5) = 2\times0{,}5 - 1 - \ln(2\times0{,}5) = 1 - 1 - \ln(1) = 0 - 0 = 0$

Grâce à la **monotonie** :

sur $]\,0\,;0{,}5\,[$ et sur $]\,0{,}5\,;+\infty\,[$ $f(x) > 0$

Réponse :

x	0		$0{,}5$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$+$	

Exercice 6 :

1°) Déterminez les limites de la fonction

définie sur $] 0 ; + \infty [$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

2°) Déterminez ses sens de variation et ses signes.

1°) limites de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$x \to 0^+$ $\quad \dfrac{1}{x} \to \dots$ $\quad \ln(x) \to \dots$ $\quad \Rightarrow \quad f(x) \to \dots$

1°) limites de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]\ 0\ ;+\infty\ [$

$x \to 0^+ \qquad \dfrac{1}{x} \to +\infty$ et $\ln(x) \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$

1°) limites de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]\ 0\ ;+\infty\ [$

$x \to 0^+$ $\quad \dfrac{1}{x} \to +\infty$ et $\ln(x) \to -\infty$ $\Rightarrow$ $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ $\quad \dfrac{1}{x} \to \ldots$ $\quad \ln(x) \to \ldots$ $\Rightarrow$ $f(x) \to \ldots$

1°) limites de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$

$x \to 0^+ \qquad \dfrac{1}{x} \to +\infty$ et $\ln(x) \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty \qquad \dfrac{1}{x} \to 0^+$ et $\ln(x) \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to$ indéter.

1°) limites de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]\, 0\,;+\infty\,[$

$x \to 0^+$ $\quad \dfrac{1}{x} \to +\infty$ et $\ln(x) \to -\infty$ $\Rightarrow$ $f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty$ $\quad \dfrac{1}{x} \to 0^+$ et $\ln(x) \to +\infty$ $\Rightarrow$ $f(x) \to$ indéter.

Par croissances comparées $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$

2°) variations de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}\,x - 1\,\ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

2°) variations de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$

$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}\,x - 1\,\ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

x dans $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$ $\Rightarrow$ *dénominateur* $x^2 > 0$

numérateur : $1 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ …

2°) variations de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur] 0 ; + ∞ [

$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}\,x - 1\,\ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

x dans] 0 ; + ∞ [⟹ *dénominateur* $x^2 > 0$

numérateur : $1 - \ln(x) \geq 0 \iff -\ln(x) \geq 0 - 1 = -1$

$\iff \ln(x) \leq -1/(-1) = 1 \iff$ ...

2°) variations de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $] 0 ; + \infty [$

$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - v' u}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}\, x - 1 \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

x dans $] 0 ; + \infty [$ $\Rightarrow$ *dénominateur* $x^2 > 0$

numérateur : $1 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow - \ln(x) \geq 0 - 1 = - 1$

$\Leftrightarrow \ln(x) \leq - 1/(- 1) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} \leq e^1$ car la fonction exponentielle est str. croissante sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow x \leq e$

sens de variation

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \qquad f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \qquad \text{sur }]\,0\,;+\infty\,[$$

x	0		e		$+\infty$
$1 - \ln(x)$	‖	$+$	0	$-$	
x^2	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖				

sens de variation

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \qquad f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \qquad \text{sur }]\,0\,;+\infty\,[$$

x	0 ||		e		$+\infty$
$1 - \ln(x)$	||	$+$	0	$-$	
x^2	||	$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0^+

signes de $f(x) = \ln(x) / x$ sur $] 0 ; +\infty [$

impossible de résoudre $f(x) = \ln(x) / x = 0$? Faux !

signes de $f(x) = \ln(x) / x$ sur $]0 ; +\infty[$

*Pour **cet** exercice*, on n'a **pas** à utiliser le **tableau de variation** pour démontrer les signes de f ! Il ne sert qu'à vérifier que nos signes sont justes.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = 0 \iff \ln(x) = 0 \iff x = 1$$

signes de $f(x) = \ln(x) / x$ sur $]0 ; +\infty[$

*Pour **cet** exercice*, on n'a **pas** à utiliser le **tableau de variation** pour démontrer les signes de f ! Il ne sert qu'à vérifier que nos signes sont justes.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Sur $]0 ; +\infty[$ $x > 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ est du signe de $\ln(x)$

signes de $f(x) = \ln(x) / x$ sur $] 0 ; +\infty [$

*Pour **cet** exercice*, on n'a **pas** à utiliser le **tableau de variation** pour démontrer les signes de f ! Il ne sert qu'à vérifier que nos signes sont justes.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Sur $] 0 ; +\infty [$ $x > 0 \Rightarrow$ $f(x)$ est du signe de $\ln(x)$

Réponse :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

signes de $f(x) = \ln(x) / x$ sur $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$

x	0		1		e		$+\infty$
f(x)	$\Vert$	$-\infty$ ↗ $-$	0	↗ $+$		$+$ ↘	0^+

ln(x)

les signes sont bien compatibles avec avec les variations

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = 0 \iff \ln(x) = 0 \iff x = 1$$

Sur $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$ $x > 0 \Longrightarrow f(x)$ est du signe de $\ln(x)$

Réponse :

x	0		1		$+\infty$
f(x)	$\Vert$	$-$	0	$+$	