Exercice 5 :

La demi- vie d’un corps radioactif est la durée durant laquelle il perd la moitié de sa radioactivité.

Le nombre de noyaux radioactifs d’une masse d’Uranium 235 à l’instant t est

$$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$$

(t est en millions d’années
et ’’/’’ désigne la barre de fraction)

1°) Déterminez les sens de variations et signes de f.

2°) Déterminez la demi-vie de cette masse d’Uranium 235.

1°) Déterminez les **signes** de f.

$$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$$

Signes :

t	
f(t)	

1°) Déterminez les **signes** de f.

$$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$$

Signes :

$1000 > 0$

$e^{u} > 0$ pour tous les réels u

⇒ $f(t) > 0$

t	0 $+\infty$
f(t)	+

1°) Déterminez les **sens de variations** de f.

$$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$$

1°) Déterminez les **sens de variations** de f.

$$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$$

$$f\,'(t) = 1000 \left(e^{-\frac{t}{1015}} \right)' = \ldots$$

1°) Déterminez les **sens de variations** de f.

$$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$$

$$f\,'(t) = 1000\,\left(e^{-\frac{t}{1015}} \right)' = 1000\,(e^{u})'$$

$$(e^{x})' = e^{x} \Rightarrow (e^{u})' = e^{u} \times u'$$ d'après $(v\,(u)\,)' = v'\,(u) \times u'$

$$f\,'(t) = \ldots$$

1°) Déterminez les **sens de variations** de f.

$$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$$

$$f'(t) = 1000\left(e^{-\frac{t}{1015}} \right)' = 1000\,(e^{u})'$$

$$(e^{x})' = e^{x} \Longrightarrow (e^{u})' = e^{u} \times u'$$ d'après $(v(u))' = v'(u) \times u'$

$$f'(t) = 1000\left(e^{-\frac{t}{1015}} \right)' = 1000\,(e^{u})' = 1000\, e^{u} \times u'$$

$$= 1000\, e^{-\frac{t}{1015}} \times \left(-\frac{t}{1015} \right)'$$

$$= 1000\, e^{-\frac{t}{1015}} \times \ldots$$

1°) Déterminez les **sens de variations** de f.

$$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$$

$$f'(t) = 1000\,(e^{-\frac{t}{1015}})' = 1000\,(e^{u})'$$

$$(e^{x})' = e^{x} \Rightarrow (e^{u})' = e^{u} \times u'$$ d'après $(v(u))' = v'(u) \times u'$

$$f'(t) = 1000(e^{-\frac{t}{1015}})' = 1000\,(e^{u})' = 1000\, e^{u} \times u'$$

$$= 1000\, e^{-\frac{t}{1015}} \times \left(-\frac{t}{1015} \right)'$$

$$= 1000\, e^{-\frac{t}{1015}} \times \left(-\frac{1}{1015} \right)$$

$$= -\frac{1000}{1015}\, e^{-\frac{t}{1015}}$$

1°) Déterminez les **sens de variations** de f.

$$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}} \qquad f'(t) = -\frac{1000}{1015}\, e^{-\frac{t}{1015}}$$

1°) Déterminez les **sens de variations** de f.

$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$ $\qquad$ $f'(t) = -\dfrac{1000}{1015}\, e^{-\frac{t}{1015}}$

$e^{u} > 0$ pour tous les réels u

$\Rightarrow$ $f'(t) < 0$ pour tous les t de $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$

1°) Déterminez les **sens de variations** de f.

$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$ $\qquad f'(t) = -\frac{1000}{1015}\, e^{-\frac{t}{1015}}$

$e^{u} > 0$ pour tous les réels u

$\Rightarrow$ $f'(t) < 0$ pour tous les t de $[\,0\,;+\infty\,[$

t	0	$+\infty$
f '(t)	–	

1°) Déterminez les **sens de variations** de f.

$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$ $\qquad$ $f'(t) = -\dfrac{1000}{1015}\, e^{-\frac{t}{1015}}$

$e^{u} > 0$ pour tous les réels u

$\Longrightarrow$ $f'(t) < 0$ pour tous les t de $[\,0\,;+\infty\,[$

t	0	+ ∞
f '(t)	–	
f(t)		

1°) Déterminez les **sens de variations** de f.

$f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$ $\qquad$ $f'(t) = -\dfrac{1000}{1015}\, e^{-\frac{t}{1015}}$

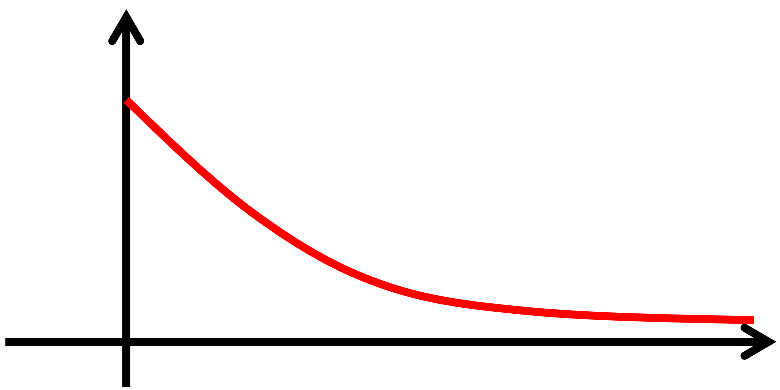
$e^{u} > 0$ pour tous les réels u

$\Rightarrow$ $f'(t) < 0$ pour tous les t de $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$

compatible avec les signes et la courbe :

t	0	+ ∞
f '(t)	–	
f(t)	↘	

t	0	+ ∞
f(t)	+	



2°) demi- vie d’un corps radioactif = durée durant laquelle il perd la moitié de sa radioactivité.

N^b de noyaux radioactifs = f(x) = $1000\,e^{-\frac{t}{1015}}$

Déterminez la demi-vie.

2°) demi- vie d'un corps radioactif = durée durant laquelle il perd la moitié de sa radioactivité.

N^b de noyaux radioactifs = $f(x) = 1000\ e^{-\frac{t}{1015}}$

Déterminez la demi-vie.

Radioactivité initiale = $f(0) = 1000\ e^{-0} = 1000$

Radioactivité à demi-vie = $1000 / 2 = 500$

2°) demi- vie d’un corps radioactif = durée durant laquelle il perd la moitié de sa radioactivité.

N^b de noyaux radioactifs = $f(x) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}}$

Déterminez la demi-vie.

Radioactivité initiale = $f(0) = 1000\, e^{-0} = 1000$

Radioactivité à demi-vie = 1000 / 2 = 500

demi-vie = t tel que $f(t) = 1000\, e^{-\frac{t}{1015}} = 500$

2°) demi- vie d’un corps radioactif = durée durant laquelle il perd la moitié de sa radioactivité.

N^b de noyaux radioactifs = $f(x) = 1000\ e^{-\frac{t}{1015}}$

Déterminez la demi-vie.

Radioactivité initiale = $f(0) = 1000\ e^{-0} = 1000$

Radioactivité à demi-vie = $1000 / 2 = 500$

demi-vie = t tel que $f(t) = 1000\ e^{-\frac{t}{1015}} = 500$

$\Leftrightarrow\ e^{-\frac{t}{1015}} = 500 / 1000 = 0,5$

2°) demi- vie d'un corps radioactif = durée durant laquelle il perd la moitié de sa radioactivité.

N^b de noyaux radioactifs = f(x) = $1000\ e^{-\frac{t}{1015}}$

Déterminez la demi-vie.

Radioactivité initiale = f(0) = $1000\ e^{-0} = 1000$

Radioactivité à demi-vie = 1000 / 2 = 500

demi-vie = t tel que $f(t) = 1000\ e^{-\frac{t}{1015}} = 500$

$\Longleftrightarrow\ e^{-\frac{t}{1015}} = 500 / 1000 = 0{,}5$

Il faut attendre un chapitre ultérieur pour résoudre algébriquement cette équation.

Calculatrice : on obtient T ≈ ... millions d'années

2°) demi- vie d'un corps radioactif = durée durant laquelle il perd la moitié de sa radioactivité.

N^b de noyaux radioactifs = $f(x) = 1000\ e^{-\frac{t}{1015}}$

Déterminez la demi-vie.

Radioactivité initiale = $f(0) = 1000\ e^{-0} = 1000$

Radioactivité à demi-vie = $1000 / 2 = 500$

demi-vie = t tel que $f(t) = 1000\ e^{-\frac{t}{1015}} = 500$

$\Leftrightarrow\ e^{-\frac{t}{1015}} = 500 / 1000 = 0{,}5$

Il faut attendre un chapitre ultérieur pour résoudre algébriquement cette équation.

Calculatrice : on obtient $T \approx 704$ millions d'années

Exercice 6 :

x désigne le nombre de milliers de pièces fabriquées par une usine.

$f(x) = (10x – 20) e^{- 0,1 x}$ désigne le bénéfice en milliers d'€.

Combien de pièces l'usine a-t-elle intérêt à fabriquer ?

x = n^{b} de milliers de pièces fabriquées

$f(x) = (10x - 20)\, e^{-0,1x}$ = bénéfice en milliers d'€.

Combien de pièces l'usine a-t-elle intérêt à fabriquer ?

Intérêt : bénéfice maxi = maximum de la fct
obtenu avec le tableau de variation

x = n^b de milliers de pièces fabriquées

$f(x) = (10x - 20)\, e^{-0,1x}$ = bénéfice en milliers d'€.

Combien de pièces l'usine a-t-elle intérêt à fabriquer ?

Intérêt : bénéfice maxi = maximum de la fct

obtenu avec le tableau de variation

$$f'(x) = (u \times v)' = u'v + v'u$$

$$= (10x - 20)'\, e^{-0,1x} + (e^{-0,1x})'\,(10x - 20)$$

$f\,'(x) = (\, u \times v\,)' = u'\, v + v'\, u$ d’après le tableau des dérivées

$$= (\, 10x - 20\,)'\, e^{-0,1\,x} + (\, e^{-0,1\,x}\,)'\, (\, 10x - 20\,)$$

$f'(x) = (u \times v)' = u'v + v'u$ d'après le tableau des dérivées

$$= (10x - 20)'\, e^{-0,1x} + \left(e^{-0,1x}\right)' (10x - 20)$$

$u = 10x - 20 \Longrightarrow u' = 10$ d'après $(ax + b)' = a$

$f'(x) = (u \times v)' = u'v + v'u$ d'après le tableau des dérivées

$= (10x - 20)'\, e^{-0,1x} + (e^{-0,1x})'\,(10x - 20)$

$u = 10x - 20 \Longrightarrow u' = 10$ d'après $(ax + b)' = a$

$(e^{x})' = e^{x}$

$(e^{w})' = e^{w} \times w'$ d'après $(v(u))' = v'(u) \times u'$

$f'(x) = (u \times v)' = u'v + v'u$ d'après le tableau des dérivées

$= (10x - 20)'\, e^{-0,1x} + (e^{-0,1x})'\,(10x - 20)$

$u = 10x - 20 \Longrightarrow u' = 10$ d'après $(ax + b)' = a$

$(e^{x})' = e^{x}$

$(e^{w})' = e^{w} \times w'$ d'après $(v(u))' = v'(u) \times u'$

$v' = (e^{-0,1x})' = (e^{w})' = e^{w} \times w' = e^{-0,1x} \times (-0,1x)'$

$= e^{-0,1x} \times (-0,1)$

$f'(x) = (u \times v)' = u'v + v'u$ d'après le tableau des dérivées

$= (10x - 20)' e^{-0,1x} + (e^{-0,1x})' (10x - 20)$

$u = 10x - 20 \Longrightarrow u' = 10$ d'après $(ax + b)' = a$

$(e^{x})' = e^{x}$

$(e^{w})' = e^{w} \times w'$ d'après $(v(u))' = v'(u) \times u'$

$v' = (e^{-0,1x})' = (e^{w})' = e^{w} \times w' = e^{-0,1x} \times (-0,1x)'$

$= e^{-0,1x} \times (-0,1)$

$f'(x) = 10 e^{-0,1x} + (e^{-0,1x} \times (-0,1))(10x - 20)$

$f'(x) = (u \times v)' = u'v + v'u$ d'après le tableau des dérivées

$= (10x - 20)' e^{-0,1x} + (e^{-0,1x})' (10x - 20)$

$u = 10x - 20 \Longrightarrow u' = 10$ d'après $(ax + b)' = a$

$(e^x)' = e^x$

$(e^w)' = e^w \times w'$ d'après $(v(u))' = v'(u) \times u'$

$v' = (e^{-0,1x})' = (e^w)' = e^w \times w' = e^{-0,1x} \times (-0,1x)'$

$= e^{-0,1x} \times (-0,1)$

$f'(x) = 10\, e^{-0,1x} + (e^{-0,1x} \times (-0,1))(10x - 20)$

pas de loi sur le signe d'une somme

$\Longrightarrow$ à factoriser en : $f'(x) = e^{-0,1x} \times (\ldots \qquad)$

$f'(x) = (u \times v)' = u'v + v'u$ d'après le tableau des dérivées

$= (10x - 20)' e^{-0,1x} + (e^{-0,1x})' (10x - 20)$

$u = 10x - 20 \Longrightarrow u' = 10$ d'après $(ax + b)' = a$

$(e^x)' = e^x$

$(e^w)' = e^w \times w'$ d'après $(v(u))' = v'(u) \times u'$

$v' = (e^{-0,1x})' = (e^w)' = e^w \times w' = e^{-0,1x} \times (-0,1x)'$

$= e^{-0,1x} \times (-0,1)$

$f'(x) = 10e^{-0,1x} + (e^{-0,1x} \times (-0,1))(10x - 20)$

$= e^{-0,1x} \times (10 + (-0,1) \times (10x - 20))$

$f'(x) = (u \times v)' = u'v + v'u$ d'après le tableau des dérivées

$= (10x - 20)' e^{-0,1x} + (e^{-0,1x})' (10x - 20)$

$u = 10x - 20 \Longrightarrow u' = 10$ d'après $(ax + b)' = a$

$(e^{x})' = e^{x}$

$(e^{w})' = e^{w} \times w'$ d'après $(v(u))' = v'(u) \times u'$

$v' = (e^{-0,1x})' = (e^{w})' = e^{w} \times w' = e^{-0,1x} \times (-0,1x)'$

$= e^{-0,1x} \times (-0,1)$

$f'(x) = 10\, e^{-0,1x} + (e^{-0,1x} \times (-0,1))(10x - 20)$

$= e^{-0,1x} \times (10 + (-0,1) \times (10x - 20))$

$= e^{-0,1x} (10 - 1x + 2)$

$$f'(x) = (u \times v)' = u'v + v'u$$ d'après le tableau des dérivées

$$= (10x - 20)'\, e^{-0,1x} + (e^{-0,1x})'\,(10x - 20)$$

$$u = 10x - 20 \Rightarrow u' = 10$$ d'après $(ax + b)' = a$

$$(e^{x})' = e^{x}$$

$$(e^{w})' = e^{w} \times w'$$ d'après $(v(u))' = v'(u) \times u'$

$$v' = (e^{-0,1x})' = (e^{w})' = e^{w} \times w' = e^{-0,1x} \times (-0,1x)'$$

$$= e^{-0,1x} \times (-0,1)$$

$$f'(x) = 10\, e^{-0,1x} + (e^{-0,1x} \times (-0,1))\,(10x - 20)$$

$$= e^{-0,1x} \times (10 + (-0,1) \times (10x - 20))$$

$$= e^{-0,1x}\,(10 - 1x + 2) \qquad = e^{-0,1x}\,(12 - x)$$

$f(x) = (10x - 20)\, e^{-0,1x}$

$f'(x) = e^{-0,1x}\,(12 - x)$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	

$f(x) = (10x - 20)\, e^{-0,1x}$

$f'(x) = e^{-0,1x}\,(12 - x)$

$e^{u} > 0$ pour tous les réels u

$\Rightarrow$ $f'(x)$ est du signe de $(12 - x)$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	

$f(x) = (10x - 20)\, e^{-0,1\,x}$

$f'(x) = e^{-0,1\,x}\,(12 - x)$

$e^{u} > 0$ pour tous les réels u

$\Rightarrow$ $f'(x)$ est du signe de $(12 - x)$

$12 - x = 0 \Leftrightarrow -x = -12 \Leftrightarrow x = -12/(-1) = 12$

x	0	12	+ ∞
f '(x)		0	

$f(x) = (10x - 20)\, e^{-0,1x}$

$f'(x) = e^{-0,1x}\,(12 - x)$

$e^{u} > 0$ pour tous les réels u

$\Rightarrow$ $f'(x)$ est du signe de $(12 - x)$

$12 - x = 0 \Leftrightarrow -x = -12 \Leftrightarrow x = -12/(-1) = 12$

$12 - x < 0 \Leftrightarrow -x < -12 \Leftrightarrow x > -12/(-1) = 12$

x	0	12		$+\infty$
$f'(x)$		0	$-$	

$f(x) = (10x - 20)\, e^{-0,1x}$

$f'(x) = e^{-0,1x}\,(12 - x)$

$e^{u} > 0$ pour tous les réels u

$\Rightarrow$ $f'(x)$ est du signe de $(12 - x)$

$12 - x = 0 \Leftrightarrow -x = -12 \Leftrightarrow x = -12/(-1) = 12$

$12 - x < 0 \Leftrightarrow -x < -12 \Leftrightarrow x > -12/(-1) = 12$

$12 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -12 \Leftrightarrow x < -12/(-1) = 12$

x	0		12		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	

$f(x) = (10x - 20)\, e^{-0,1x}$

$f'(x) = e^{-0,1x}\,(12 - x)$

$e^{u} > 0$ pour tous les réels u

⇒ $f'(x)$ est du signe de $(12 - x)$

Autre justification du signe de $(12 - x)$ *:*

$12 - x$ est une expression affine $-1x + 12$

Coeff. directeur = $-1 < 0$ ⇒ décroissante ⇒ signes + 0 –

x	0		12		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

$f(x) = (10x - 20) e^{-0,1x}$

$f'(x) = e^{-0,1x} (12 - x)$

$e^u > 0$ pour tous les réels u

⇒ $f'(x)$ est du signe de $(12 - x)$

x	0		12		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

$f(x) = (10x - 20)\, e^{-0,1\,x}$

$f'(x) = e^{-0,1\,x} (12 - x)$

$e^{u} > 0$ pour tous les réels u

$\Rightarrow$ $f'(x)$ est du signe de $(12 - x)$

x	0		12		+ ∞
f '(x)		+	0	-	
f(x)		$\nearrow$		$\searrow$	

d'après le théorème de la monotonie

$f(x) = (10x - 20)\, e^{-0,1\,x}$

$f'(x) = e^{-0,1\,x} (12 - x)$

$e^{u} > 0$ pour tous les réels u

$\Rightarrow$ $f'(x)$ est du signe de $(12 - x)$

x	0		12		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\Rightarrow$ Le bénéfice est maximum

pour 12000 pièces fabriquées