

# Les équations différentielles

## I Définition

Une *équation différentielle* a pour inconnue ...

# Les équations différentielles

## I Définition

Une *équation différentielle* a pour inconnue une fonction  
et comporte une fonction et une ou plusieurs de ses *dérivées* successives.

Une *équation différentielle du premier ordre* comporte une fonction  $y$  et ...

# Les équations différentielles

## I Définition

Une *équation différentielle* a pour inconnue une fonction et comporte une fonction et une ou plusieurs de ses *dérivées* successives.

Une *équation différentielle du premier ordre* comporte une fonction  $y$  et sa dérivée  $y'$ .

Une *équation différentielle du second ordre* comporte une fonction  $y$  et ...

# Les équations différentielles

## I Définition

Une *équation différentielle* a pour inconnue une fonction et comporte une fonction et une ou plusieurs de ses *dérivées* successives.

Une *équation différentielle du premier ordre* comporte une fonction  $y$  et sa dérivée  $y'$ .

Une *équation différentielle du second ordre* comporte une fonction  $y$  et sa dérivée  $y'$  et sa dérivée seconde  $y''$ .

Une *équation différentielle linéaire* est ...

# Les équations différentielles

## I Définition

Une *équation différentielle* a pour inconnue une fonction et comporte une fonction et une ou plusieurs de ses dérivées successives.

Une *équation différentielle du premier ordre* comporte une fonction  $y$  et sa dérivée  $y'$ .

Une *équation différentielle du second ordre* comporte une fonction  $y$  et sa dérivée  $y'$  et sa dérivée seconde  $y''$ .

Une *équation différentielle linéaire* est une relation affine  $ay + by' + cy'' = d$

Une *équation différentielle linéaire* peut avoir des coefficients  $a, b, c, d$  etc... constants ( donc des réels fixés ) ou non constants ( donc dépendant de ...

# Les équations différentielles

## I Définition

Une *équation différentielle* a pour inconnue une fonction et comporte une fonction et une ou plusieurs de ses dérivées successives.

Une *équation différentielle du premier ordre* comporte une fonction  $y$  et sa dérivée  $y'$ .

Une *équation différentielle du second ordre* comporte une fonction  $y$  et sa dérivée  $y'$  et sa dérivée seconde  $y''$ .

Une *équation différentielle linéaire* est une relation affine  $ay + by' + cy'' = d$

Une *équation différentielle linéaire* peut avoir des coefficients  $a, b, c, d$  etc... constants ( donc des réels fixés ) ou non constants ( donc dépendant de  $x$  ).

$y$  d'une *équation différentielle*  $ay + by' + cy'' = d$   
représente l'image  $f(x)$  d'un  $x$  par une fonction  $f$

Que représente  $y'$  ?

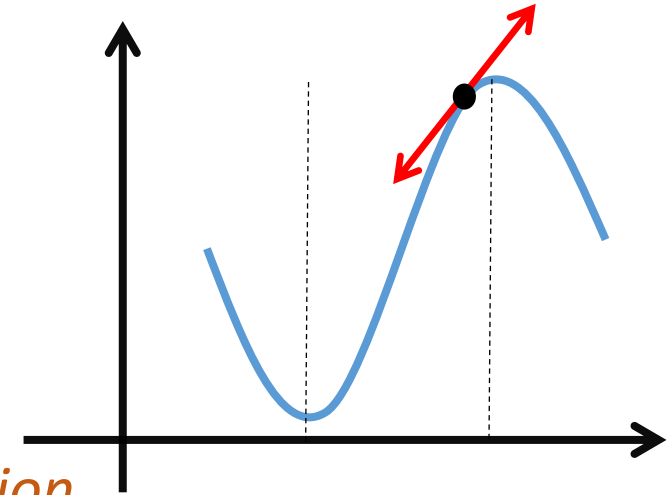
$y' = \dots$

$y$  d'une *équation différentielle*  $ay + by' + cy'' = d$   
représente l'image  $f(x)$  d'un  $x$  par une fonction  $f$

Que représente  $y'$  ?

$y' = f'(x) =$  coeff. directeur des tangentes

$$= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Delta \text{ est le symbole de la variation}$$





$y$  d'une *équation différentielle*  $ay + by' + cy'' = d$   
 représente l'image  $f(x)$  d'un  $x$  par une fonction  $f$

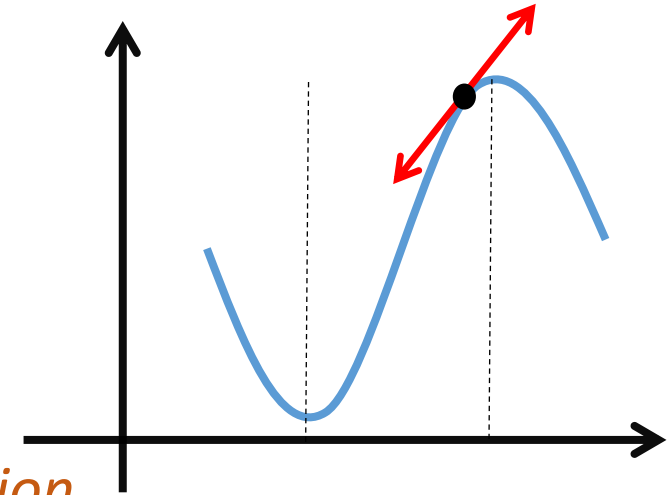
Que représente  $y'$  ?

$y' = f'(x) =$  coeff. directeur des tangentes

$$= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Delta \text{ est le symbole de la } \textit{variation}$$

$y' = \textit{variation}$  des  $y$

( proportionnellement à la variation des  $x$  )



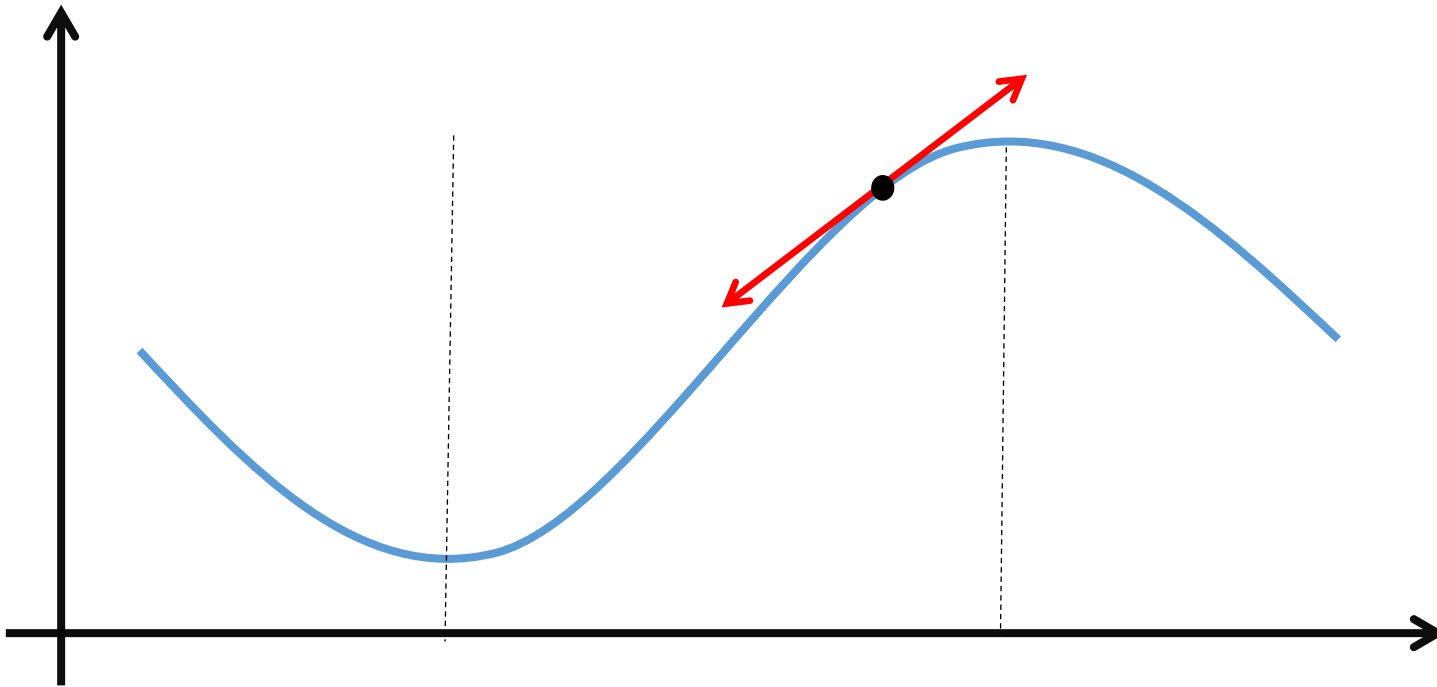
|      |   |   |   |   |   |
|------|---|---|---|---|---|
| $x$  |   |   |   |   |   |
| $y'$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $y$  |   |   |   |   |   |

confirmé par le *théorème de la monotonie*

Que représente  $y''$  ?

$$y'' = (y')' = \textit{variation des } y'$$

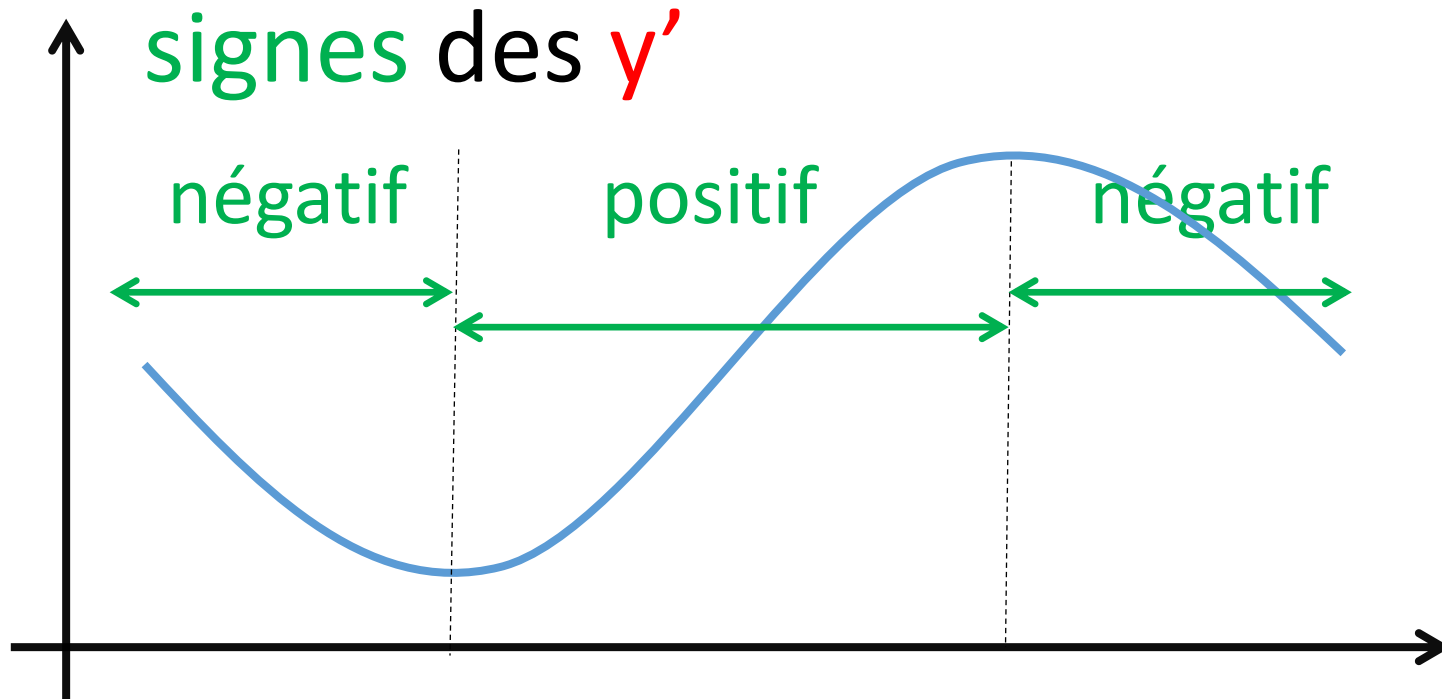
Comment *évoluent* les  $y'$  ?



Que représente  $y''$  ?

$$y'' = (y')' = \textit{variation des } y'$$

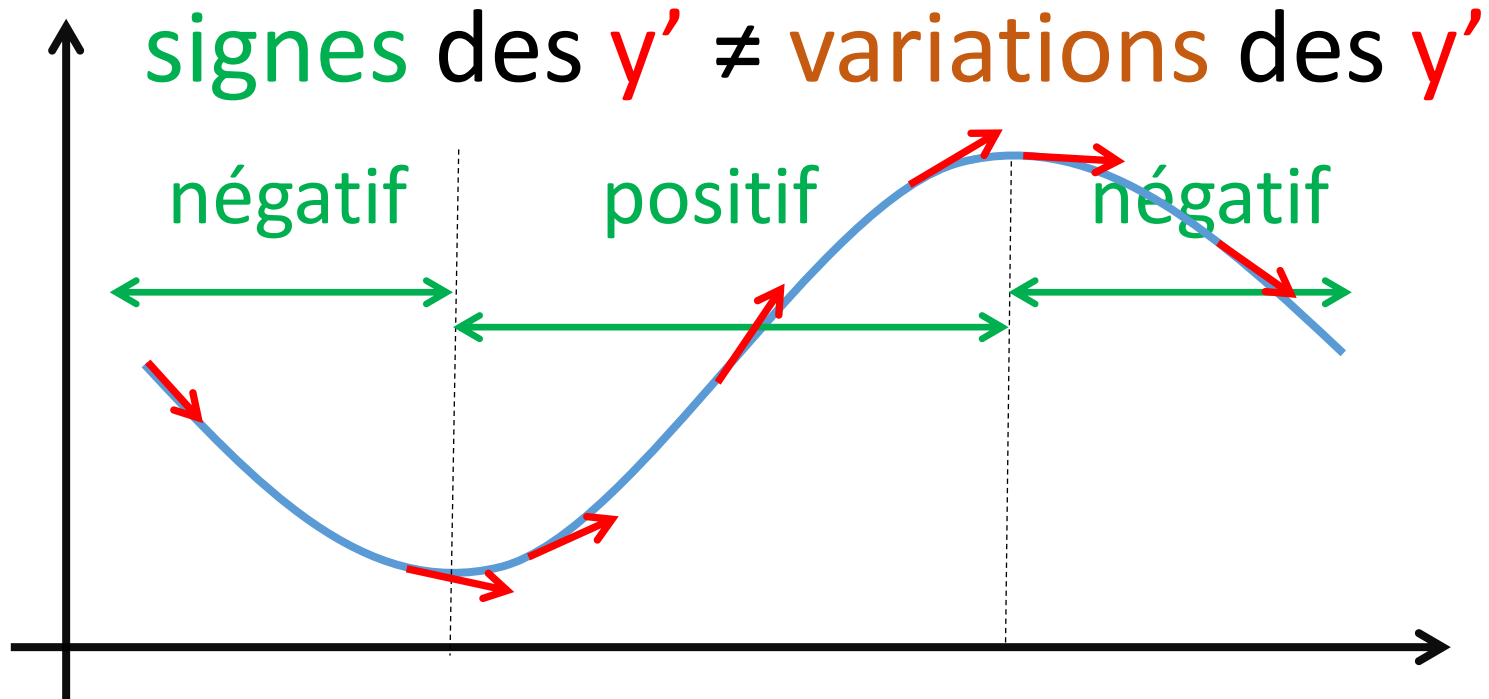
Comment évoluent les  $y'$  ?



Que représente  $y''$  ?

$$y'' = (y')' = \text{variation des } y'$$

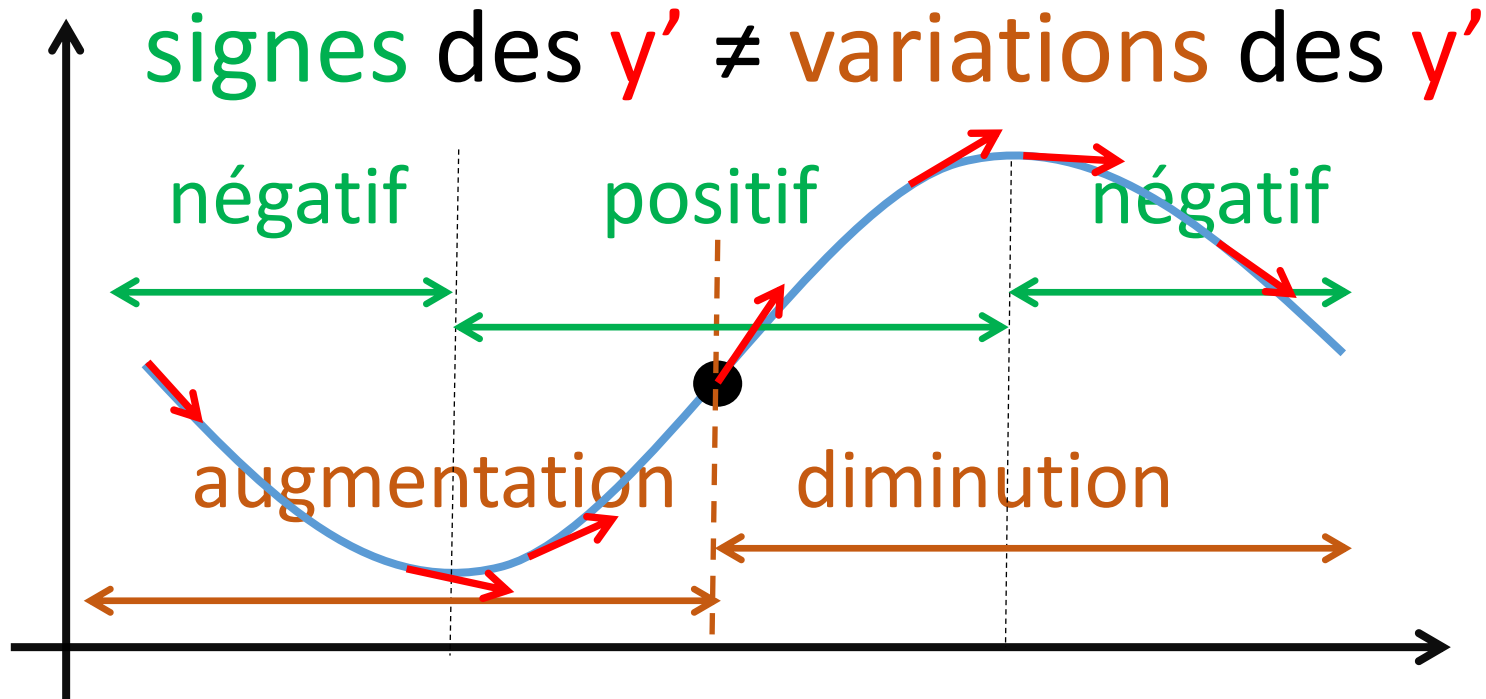
Comment évoluent les  $y'$  ?



Que représente  $y''$  ?

$$y'' = (y')' = \text{variation des } y'$$

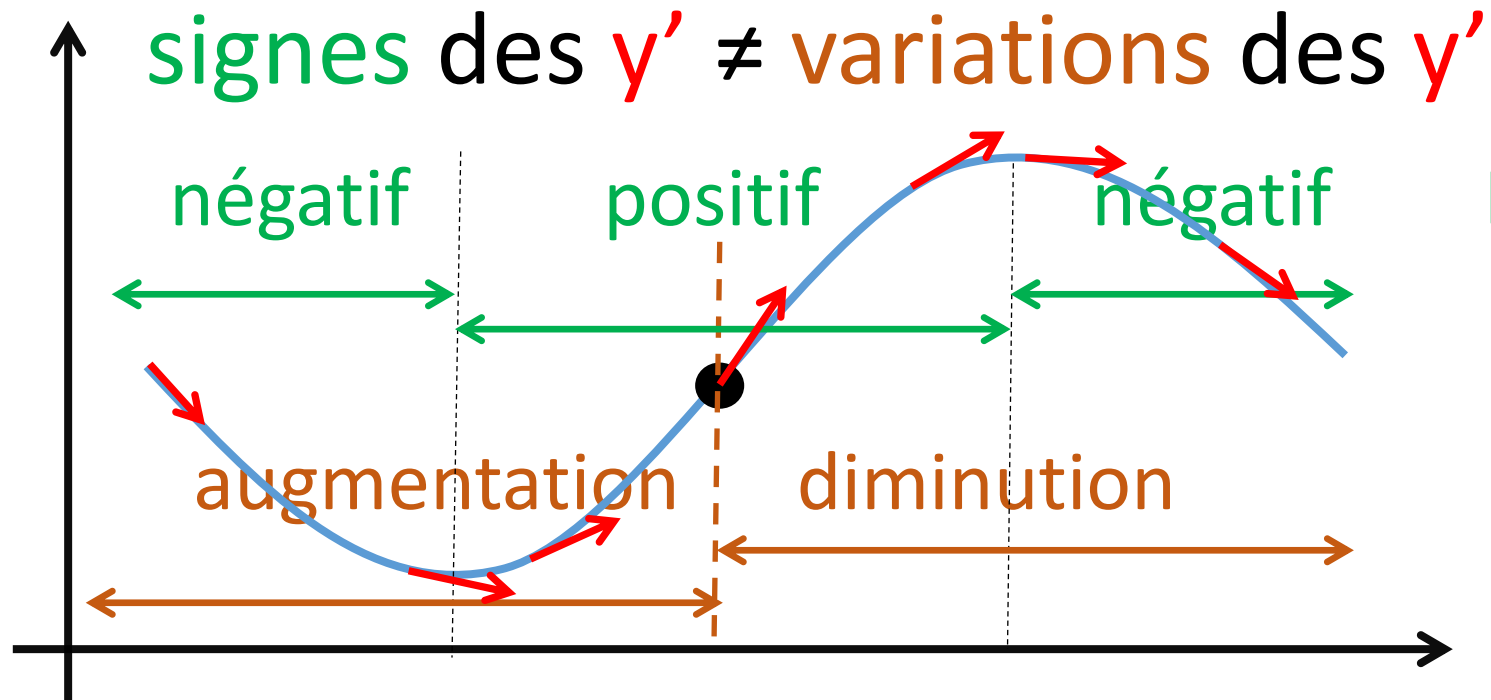
Comment évoluent les  $y'$  ?



Que représente  $y''$  ?

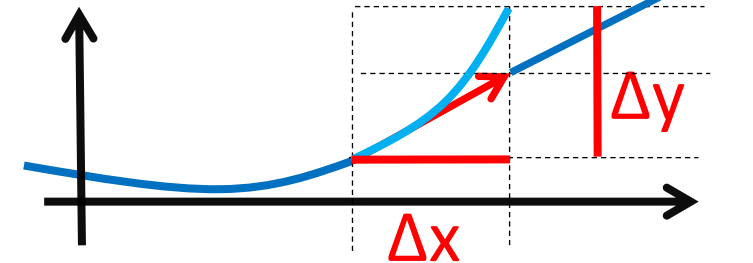
$$y'' = (y')' = \text{variation des } y'$$

Comment évoluent les  $y'$  ?



Lorsque  $y'$  augmente  
la courbe tourne

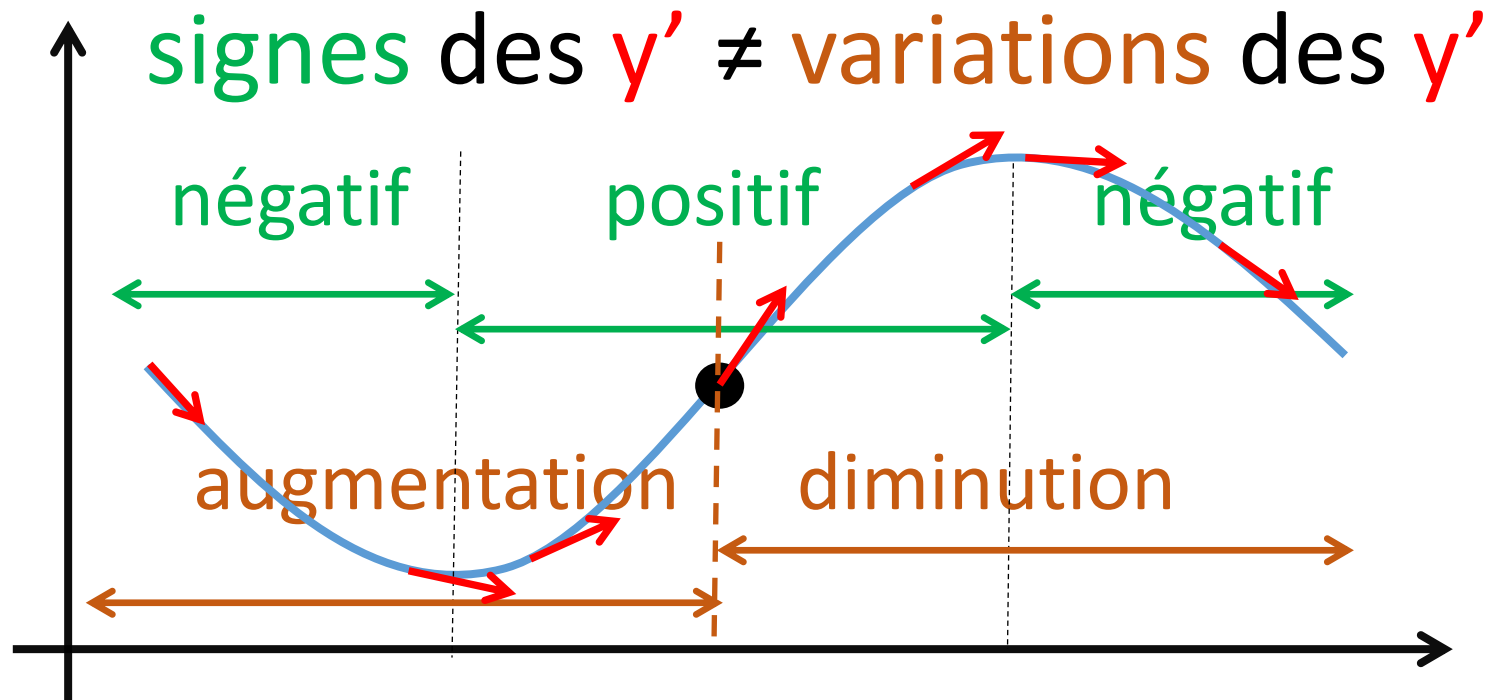
sur sa gauche



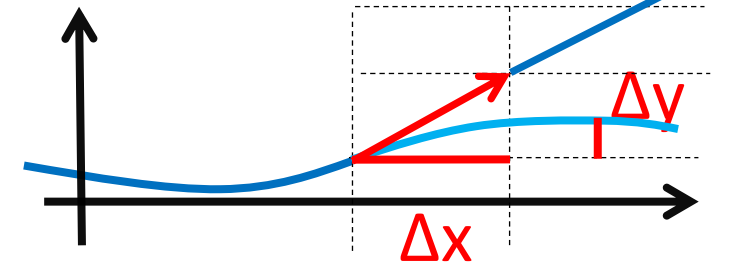
Que représente  $y''$  ?

$$y'' = (y')' = \text{variation des } y'$$

Comment évoluent les  $y'$  ?



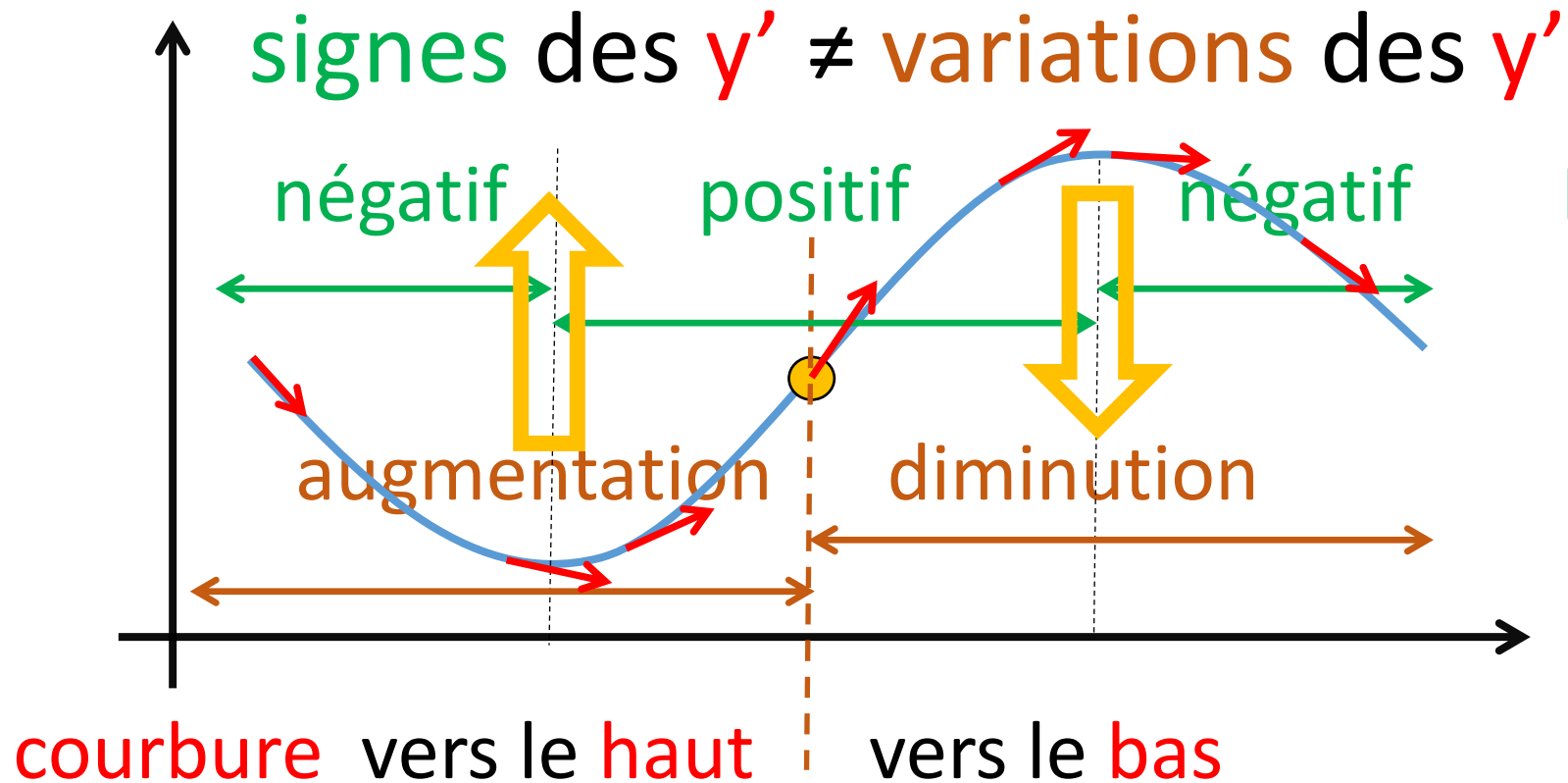
Lorsque  $y'$  diminue  
la courbe tourne  
sur sa droite



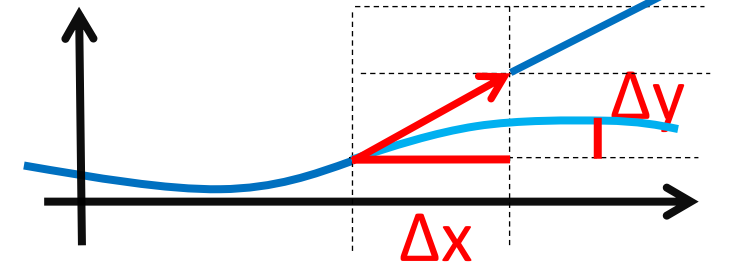
Que représente  $y''$  ?

$$y'' = (y')' = \text{variation des } y'$$

Comment évoluent les  $y'$  ?



Lorsque  $y'$  diminue  
la courbe tourne  
sur sa droite



$$y'' = \text{courbure de la courbe}$$

de part et d'autre du point d'inflexion



### Exemple :

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$

1°) Développez  $3(x - 2)(x + 4)$

2°) Déterminez les variations de  $f$ .

3°) Déterminez la courbure de la courbe de  $f$ .

Exemple :  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$  sur  $\mathbb{R}$

$$1^\circ) 3(x-2)(x+4) = 3(x^2 - 2x + 4x - 8) = 3x^2 + 6x - 24$$

Exemple :  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$  sur  $\mathbb{R}$

1°)  $3(x - 2)(x + 4) = 3(x^2 - 2x + 4x - 8) = 3x^2 + 6x - 24$

2°) Déterminez les variations de  $f$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 3(2x) - 24 = 3x^2 + 6x - 24$$

impossible de résoudre  $f(x) = 0$      $f(x) < 0$      $f(x) > 0$

Exemple :  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$  sur  $\mathbb{R}$

1°)  $3(x - 2)(x + 4) = 3(x^2 - 2x + 4x - 8) = 3x^2 + 6x - 24$

2°) Déterminez les variations de  $f$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 3(2x) - 24 = 3x^2 + 6x - 24$$

impossible de résoudre  $f(x) = 0$      $f(x) < 0$      $f(x) > 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x - 2)(x + 4) \quad \text{d'après la question 1°}$$

| x       | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $x - 2$ |           |           |
| $x + 4$ |           |           |
| $f'(x)$ |           |           |
| $f(x)$  |           |           |

Exemple :  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$  sur  $\mathbb{R}$

1°)  $3(x - 2)(x + 4) = 3(x^2 - 2x + 4x - 8) = 3x^2 + 6x - 24$

2°) Déterminez les variations de  $f$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 3(2x) - 24 = 3x^2 + 6x - 24$$

impossible de résoudre  $f(x) = 0$      $f(x) < 0$      $f(x) > 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x - 2)(x + 4) \quad \text{d'après la question 1°}$$

| x       | $-\infty$ | -4 | 2 | $+\infty$ |
|---------|-----------|----|---|-----------|
| $x - 2$ | -         | -  | 0 | +         |
| $x + 4$ | -         | 0  | + | +         |
| $f'(x)$ | +         | 0  | 0 | -         |
| $f(x)$  |           |    |   |           |

Exemple :  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$  sur  $\mathbb{R}$

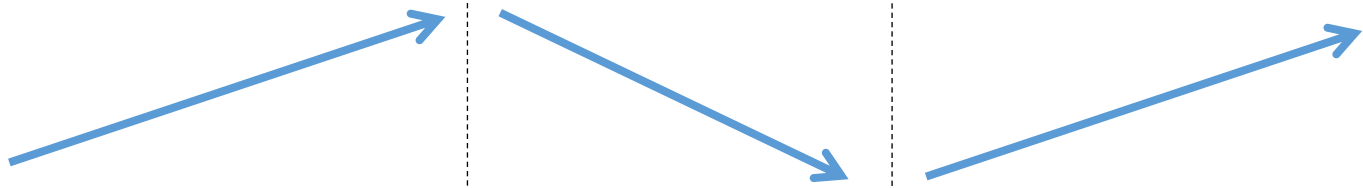
1°)  $3(x-2)(x+4) = 3(x^2 - 2x + 4x - 8) = 3x^2 + 6x - 24$

2°) Déterminez les variations de  $f$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 3(2x) - 24 = 3x^2 + 6x - 24$$

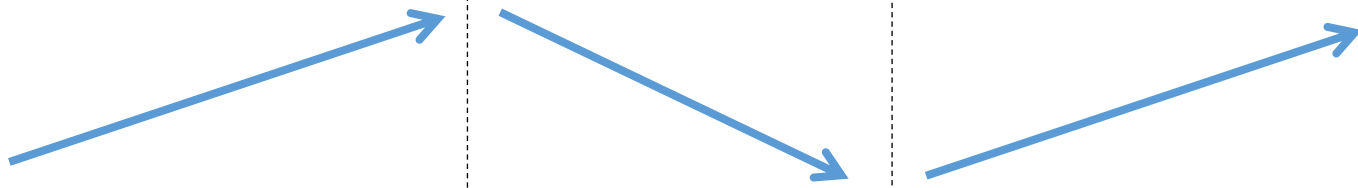
impossible de résoudre  $f(x) = 0$      $f(x) < 0$      $f(x) > 0$

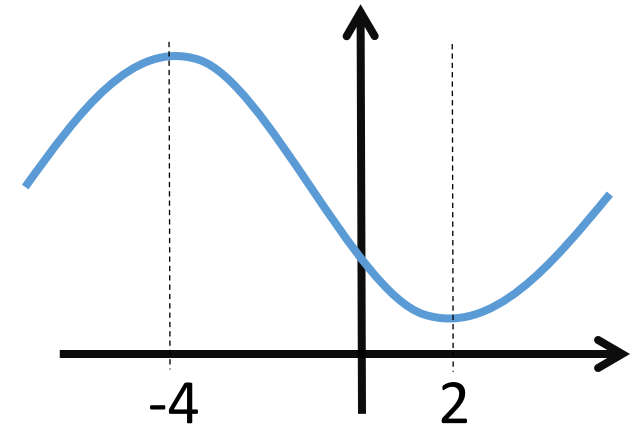
$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x-2)(x+4) \quad \text{d'après la question 1°}$$

| x       | $-\infty$                                                                            | $-4$ | $2$ | $+\infty$ |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|-----------|
| $x-2$   | $-$                                                                                  | $-$  | $0$ | $+$       |
| $x+4$   | $-$                                                                                  | $0$  | $+$ | $+$       |
| $f'(x)$ | $+$                                                                                  | $0$  | $0$ | $-$       |
| $f(x)$  |  |      |     |           |

Exemple :  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$  sur  $\mathbb{R}$

2°) variations de  $f$ .  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x-2)(x+4)$

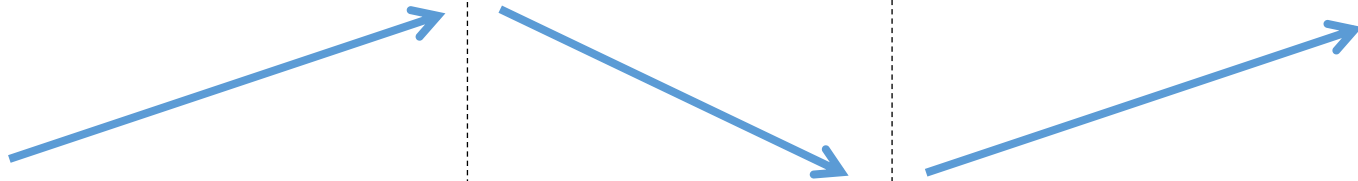
| x       | $-\infty$                                                                          | $-4$ | $2$ | $+\infty$ |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|-----------|
| $x-2$   | $-$                                                                                | $-$  | $0$ | $+$       |
| $x+4$   | $-$                                                                                | $0$  | $+$ | $+$       |
| $f'(x)$ | $+$                                                                                | $0$  | $0$ | $-$       |
| $f(x)$  |  |      |     |           |

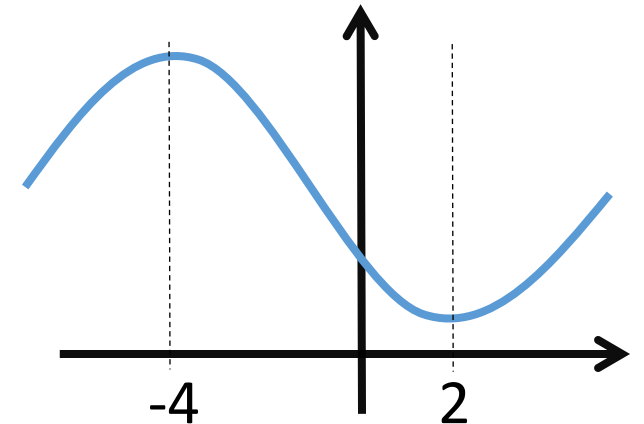


3°) Déterminez la courbure de la courbe de  $f$ .

Exemple :  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$  sur  $\mathbb{R}$

2°) variations de f.  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x-2)(x+4)$

| x       | $-\infty$                                                                          | -4 | 2 | $+\infty$ |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|----|---|-----------|
| $x-2$   | -                                                                                  | -  | 0 | +         |
| $x+4$   | -                                                                                  | 0  | + | +         |
| $f'(x)$ | +                                                                                  | 0  | 0 | -         |
| $f(x)$  |  |    |   |           |



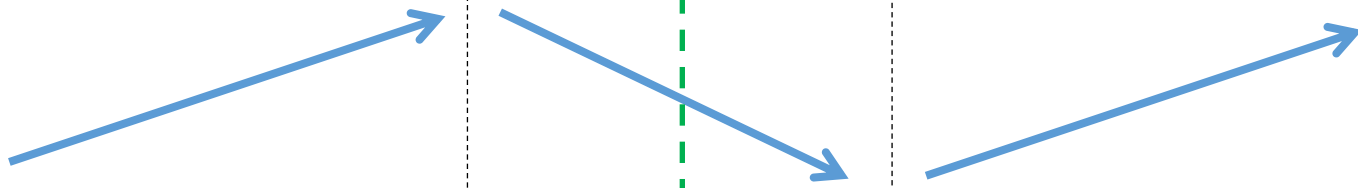
3°) Déterminez la courbure de la courbe de f.

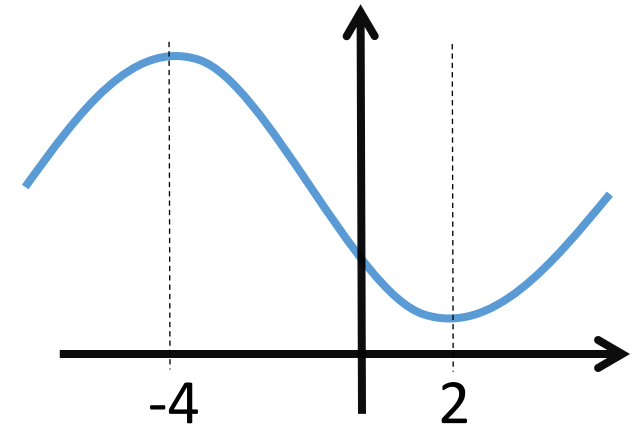
$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 + 6x - 24)' = 3(2x) + 6 = 6x + 6$$



Exemple :  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$  sur  $\mathbb{R}$

2°) variations de  $f$ .  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x-2)(x+4)$

| x        | $-\infty$                                                                          | -4 | -1 | 2 | $+\infty$ |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------|----|----|---|-----------|
| $x-2$    | -                                                                                  |    | -  | 0 | +         |
| $x+4$    | -                                                                                  | 0  | +  |   | +         |
| $f'(x)$  | +                                                                                  | 0  | -  | 0 | -         |
| $f(x)$   |  |    |    |   |           |
| $f''(x)$ |                                                                                    | -  | 0  | + |           |



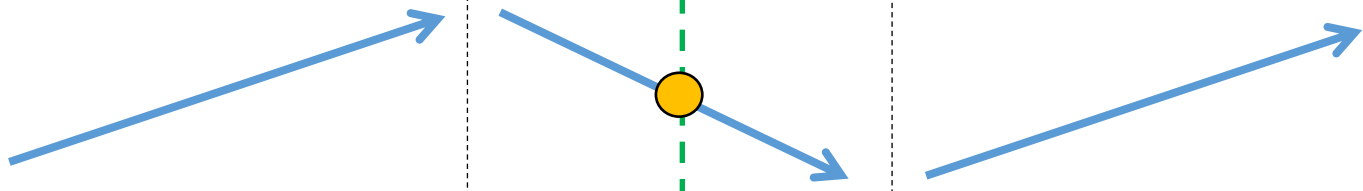
3°) Déterminez la courbure de la courbe de  $f$ .

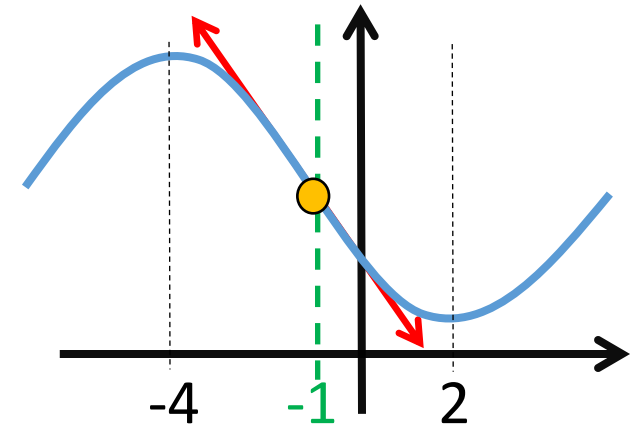
$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 + 6x - 24)' = 3(2x) + 6 = 6x + 6$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{pour } x = -1 \qquad f''(x) < 0 \quad \text{pour } x < -1$$

Exemple :  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$  sur  $\mathbb{R}$

2°) variations de f.  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x-2)(x+4)$

| x        | $-\infty$                                                                          | -4 | -1 | 2            | $+\infty$ |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------|----|----|--------------|-----------|
| $x-2$    | -                                                                                  |    | -  | 0            | +         |
| $x+4$    | -                                                                                  | 0  | +  |              | +         |
| $f'(x)$  | +                                                                                  | 0  | -  | 0            | -         |
| $f(x)$   |  |    |    |              |           |
| $f''(x)$ |                                                                                    | -  | 0  | +            |           |
| courbure | vers le bas                                                                        |    |    | vers le haut |           |



3°) Déterminez la courbure de la courbe de f.

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 + 6x - 24)' = 3(2x) + 6 = 6x + 6$$

$f''(x) = 0$  pour  $x = -1 \Rightarrow$  point d'inflexion d'abscisse -1

Si l'antécédent **x** est le temps **t**

Que représente **y'** ?

$$\mathbf{y'} = \frac{\Delta y \quad m}{\Delta t \quad s} = \dots$$

Si l'antécédent **x** est le temps **t**

Que représente **y'** ?

$$\mathbf{y'} = \frac{\Delta y \quad m}{\Delta t \quad s} = \boxed{\text{vitesse } \mathbf{v}} \quad m/s$$

Que représente **y''** ?

$$\mathbf{y''} = \dots$$

Si l'antécédent **x** est le temps **t**

Que représente **y'** ?

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \boxed{\text{vitesse } v} \quad \frac{m}{s}$$

Que représente **y''** ?

$$y'' = \frac{\Delta y'}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \frac{m/s}{s} = \dots$$

Si l'antécédent **x** est le temps **t**

Que représente **y'** ?

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \boxed{\text{vitesse } v} \quad \frac{m}{s}$$

Que représente **y''** ?

$$y'' = \frac{\Delta y'}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \boxed{\text{accélération } a} \quad \frac{m}{s^2}$$

# Exercice 1 :

1°) Les fonctions  $f_i$  sont-elles solutions des équations différentielles  $(E_i)$  ?

$$f_1(x) = kx^2 \quad \text{et} \quad (E_1) : x y' - 2y = 0$$

$$f_2(x) = e^x - x \quad \text{et} \quad (E_2) : y'' - y = x$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3 \quad \text{et} \quad (E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$$

$$f_4(x) = 3/x \quad \text{et} \quad (E_4) : 3y' + y^2 = 0$$

$$f_5(x) = k \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad (E_5) : y'' + \omega^2 y = 0$$

2°) Caractérisez les équations différentielles  $(E_i)$

1°) Les fonctions  $f_i$  sont-elles solutions des équations différentielles  $(E_i)$  ?

$$f_1(x) = kx^2 \quad \text{et} \quad (E_1) : x y' - 2y = 0$$

$$y = kx^2 \quad \longrightarrow \quad y' = \dots$$

$$x y' - 2 y = \dots$$



1°) Les fonctions  $f_i$  sont-elles solutions des équations différentielles  $(E_i)$  ?

$f_1(x) = kx^2$  et  $(E_1) : x y' - 2y = 0$

$y = kx^2 \Rightarrow y' = k(2x) = 2kx$

$x y' - 2y = x(2kx) - 2(kx^2) = 2kx^2 - 2kx^2 = 0$  Oui

$f_2(x) = e^x - x$  et  $(E_2) : y'' - y = x$

$y = e^x - x \Rightarrow y' = \dots$

1°) Les fonctions  $f_i$  sont-elles solutions des équations différentielles  $(E_i)$  ?

$f_1(x) = kx^2$  et  $(E_1) : x y' - 2y = 0$

$y = kx^2 \Rightarrow y' = k(2x) = 2kx$

$x y' - 2y = x(2kx) - 2(kx^2) = 2kx^2 - 2kx^2 = 0$  Oui

$f_2(x) = e^x - x$  et  $(E_2) : y'' - y = x$

$y = e^x - x \Rightarrow y' = e^x - 1 \Rightarrow y'' = \dots$

1°) Les fonctions  $f_i$  sont-elles solutions des équations différentielles  $(E_i)$  ?

$$f_1(x) = kx^2 \text{ et } (E_1) : x y' - 2y = 0$$

$$y = kx^2 \longrightarrow y' = k(2x) = 2kx$$

$$x y' - 2y = x(2kx) - 2(kx^2) = 2kx^2 - 2kx^2 = 0 \quad \text{Oui}$$

$$f_2(x) = e^x - x \text{ et } (E_2) : y'' - y = x$$

$$y = e^x - x \longrightarrow y' = e^x - 1 \longrightarrow y'' = e^x - 0 = e^x$$

$$y'' - y = \dots$$

1°) Les fonctions  $f_i$  sont-elles solutions des équations différentielles  $(E_i)$  ?

$$f_1(x) = kx^2 \text{ et } (E_1) : x y' - 2y = 0 \qquad y = kx^2 \longrightarrow y' = k(2x) = 2kx$$

$$x y' - 2y = x(2kx) - 2(kx^2) = 2kx^2 - 2kx^2 = 0 \qquad \text{Oui}$$

$$f_2(x) = e^x - x \text{ et } (E_2) : y'' - y = x$$

$$y = e^x - x \longrightarrow y' = e^x - 1 \longrightarrow y'' = e^x - 0 = e^x$$

$$y'' - y = (e^x) - (e^x - x) = e^x - e^x + x = x \qquad \text{Oui}$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3 \text{ et } (E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$$

$$y = 5x^2 - 4x + 3 \longrightarrow y' = \dots$$

1°) Les fonctions  $f_i$  sont-elles solutions des équations différentielles  $(E_i)$  ?

$$f_1(x) = kx^2 \text{ et } (E_1) : x y' - 2y = 0 \qquad y = kx^2 \longrightarrow y' = k(2x) = 2kx$$

$$x y' - 2y = x(2kx) - 2(kx^2) = 2kx^2 - 2kx^2 = 0 \qquad \text{Oui}$$

$$f_2(x) = e^x - x \text{ et } (E_2) : y'' - y = x$$

$$y = e^x - x \longrightarrow y' = e^x - 1 \longrightarrow y'' = e^x - 0 = e^x$$

$$y'' - y = (e^x) - (e^x - x) = e^x - e^x + x = x \qquad \text{Oui}$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3 \text{ et } (E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$$

$$y = 5x^2 - 4x + 3 \longrightarrow y' = 5(2x) - 4 = 10x - 4 \longrightarrow y'' = \dots$$

1°) Les fonctions  $f_i$  sont-elles solutions des équations différentielles  $(E_i)$  ?

$$f_1(x) = kx^2 \text{ et } (E_1) : x y' - 2y = 0 \qquad y = kx^2 \longrightarrow y' = k(2x) = 2kx$$

$$x y' - 2y = x(2kx) - 2(kx^2) = 2kx^2 - 2kx^2 = 0 \qquad \text{Oui}$$

$$f_2(x) = e^x - x \text{ et } (E_2) : y'' - y = x$$

$$y = e^x - x \longrightarrow y' = e^x - 1 \longrightarrow y'' = e^x - 0 = e^x$$

$$y'' - y = (e^x) - (e^x - x) = e^x - e^x + x = x \qquad \text{Oui}$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3 \text{ et } (E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$$

$$y = 5x^2 - 4x + 3 \longrightarrow y' = 5(2x) - 4 = 10x - 4 \longrightarrow y'' = 10$$

$$y'' + x y' - y = \dots$$

1°) Les fonctions  $f_i$  sont-elles solutions des équations différentielles  $(E_i)$  ?

$$f_1(x) = kx^2 \quad \text{et} \quad (E_1) : x y' - 2y = 0 \qquad y = kx^2 \longrightarrow y' = k(2x) = 2kx$$

$$x y' - 2y = x(2kx) - 2(kx^2) = 2kx^2 - 2kx^2 = 0 \qquad \text{Oui}$$

$$f_2(x) = e^x - x \quad \text{et} \quad (E_2) : y'' - y = x$$

$$y = e^x - x \longrightarrow y' = e^x - 1 \longrightarrow y'' = e^x - 0 = e^x$$

$$y'' - y = (e^x) - (e^x - x) = e^x - e^x + x = x \qquad \text{Oui}$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3 \quad \text{et} \quad (E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$$

$$y = 5x^2 - 4x + 3 \longrightarrow y' = 5(2x) - 4 = 10x - 4 \longrightarrow y'' = 10$$

$$y'' + x y' - y = 10 + x(10x - 4) - (5x^2 - 4x + 3)$$

= ...

1°) Les fonctions  $f_i$  sont-elles solutions des équations différentielles  $(E_i)$  ?

$$f_1(x) = kx^2 \text{ et } (E_1) : x y' - 2y = 0 \qquad y = kx^2 \longrightarrow y' = k(2x) = 2kx$$

$$x y' - 2y = x(2kx) - 2(kx^2) = 2kx^2 - 2kx^2 = 0 \qquad \text{Oui}$$

$$f_2(x) = e^x - x \text{ et } (E_2) : y'' - y = x$$

$$y = e^x - x \longrightarrow y' = e^x - 1 \longrightarrow y'' = e^x - 0 = e^x$$

$$y'' - y = (e^x) - (e^x - x) = e^x - e^x + x = x \qquad \text{Oui}$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3 \text{ et } (E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$$

$$y = 5x^2 - 4x + 3 \longrightarrow y' = 5(2x) - 4 = 10x - 4 \longrightarrow y'' = 10$$

$$y'' + x y' - y = 10 + x(10x - 4) - (5x^2 - 4x + 3)$$

$$= 10 + 10x^2 - 4x - 5x^2 + 4x - 3 = 5x^2 + 7 \qquad \text{Oui}$$

$$f_4(x) = 3/x \text{ et } (E_4) : 3y' + y^2 = 0$$

$$y = 3/x \longrightarrow y' = \dots$$



1°) Les fonctions  $f_i$  sont-elles solutions des équations différentielles  $(E_i)$  ?

$$f_1(x) = kx^2 \quad \text{et} \quad (E_1) : x y' - 2y = 0 \qquad y = kx^2 \longrightarrow y' = k(2x) = 2kx$$

$$x y' - 2y = x(2kx) - 2(kx^2) = 2kx^2 - 2kx^2 = 0 \qquad \text{Oui}$$

$$f_2(x) = e^x - x \quad \text{et} \quad (E_2) : y'' - y = x$$

$$y = e^x - x \longrightarrow y' = e^x - 1 \longrightarrow y'' = e^x - 0 = e^x$$

$$y'' - y = (e^x) - (e^x - x) = e^x - e^x + x = x \qquad \text{Oui}$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3 \quad \text{et} \quad (E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$$

$$y = 5x^2 - 4x + 3 \longrightarrow y' = 5(2x) - 4 = 10x - 4 \longrightarrow y'' = 10$$

$$y'' + x y' - y = 10 + x(10x - 4) - (5x^2 - 4x + 3)$$

$$= 10 + 10x^2 - 4x - 5x^2 + 4x - 3 = 5x^2 + 7 \qquad \text{Oui}$$

$$f_4(x) = 3/x \quad \text{et} \quad (E_4) : 3y' + y^2 = 0$$

$$y = 3/x \longrightarrow y' = 3(1/x)' = 3(-1/x^2) = -3/x^2$$

$$3y' + y^2 = \dots$$

1°) Les fonctions  $f_i$  sont-elles solutions des équations différentielles  $(E_i)$  ?

$f_1(x) = kx^2$  et  $(E_1) : x y' - 2y = 0$   $y = kx^2 \Rightarrow y' = k(2x) = 2kx$

$$x y' - 2y = x(2kx) - 2(kx^2) = 2kx^2 - 2kx^2 = 0 \quad \text{Oui}$$

$f_2(x) = e^x - x$  et  $(E_2) : y'' - y = x$

$$y = e^x - x \Rightarrow y' = e^x - 1 \Rightarrow y'' = e^x - 0 = e^x$$

$$y'' - y = (e^x) - (e^x - x) = e^x - e^x + x = x \quad \text{Oui}$$

$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3$  et  $(E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$

$$y = 5x^2 - 4x + 3 \Rightarrow y' = 5(2x) - 4 = 10x - 4 \Rightarrow y'' = 10$$

$$\begin{aligned} y'' + x y' - y &= 10 + x(10x - 4) - (5x^2 - 4x + 3) \\ &= 10 + 10x^2 - 4x - 5x^2 + 4x - 3 = 5x^2 + 7 \quad \text{Oui} \end{aligned}$$

$f_4(x) = 3/x$  et  $(E_4) : 3y' + y^2 = 0$

$$y = 3/x \Rightarrow y' = 3(1/x)' = 3(-1/x^2) = -3/x^2$$

$$3y' + y^2 = 3(-3/x^2) + (3/x)^2 = -9/x^2 + 9/x^2 = 0 \quad \text{Oui}$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3 \quad \text{et} \quad (E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$$

$$y = 5x^2 - 4x + 3 \longrightarrow y' = 5(2x) - 4 = 10x - 4 \longrightarrow y'' = 10$$

$$y'' + x y' - y = (10) + x(10x - 4) - (5x^2 - 4x + 3)$$

$$= 10 + 10x^2 - 4x - 5x^2 + 4x - 3 = 5x^2 + 7 \quad \text{Oui}$$

$$f_4(x) = 3/x \quad \text{et} \quad (E_4) : 3y' + y^2 = 0$$

$$y = 3/x \longrightarrow y' = 3(1/x)' = 3(-1/x^2) = -3/x^2$$

$$3y' + y^2 = 3(-3/x^2) + (3/x)^2 = -9/x^2 + 9/x^2 = 0 \quad \text{Oui}$$

$$f_5(x) = k \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad (E_5) : y'' + \omega^2 y = 0$$

$$y = k \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow y' = \dots$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3 \quad \text{et} \quad (E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$$

$$y = 5x^2 - 4x + 3 \longrightarrow y' = 5(2x) - 4 = 10x - 4 \longrightarrow y'' = 10$$

$$y'' + x y' - y = (10) + x(10x - 4) - (5x^2 - 4x + 3)$$

$$= 10 + 10x^2 - 4x - 5x^2 + 4x - 3 = 5x^2 + 7 \quad \text{Oui}$$

$$f_4(x) = 3/x \quad \text{et} \quad (E_4) : 3y' + y^2 = 0$$

$$y = 3/x \longrightarrow y' = 3(1/x)' = 3(-1/x^2) = -3/x^2$$

$$3y' + y^2 = 3(-3/x^2) + (3/x)^2 = -9/x^2 + 9/x^2 = 0 \quad \text{Oui}$$

$$f_5(x) = k \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad (E_5) : y'' + \omega^2 y = 0$$

$$y = k \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow y' = k(\cos u)' = k(-\sin u \times u') = k(-\sin \omega t \times \omega) = -\omega k \sin \omega t$$

$$\longrightarrow y'' = \dots$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3 \quad \text{et} \quad (E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$$

$$y = 5x^2 - 4x + 3 \longrightarrow y' = 5(2x) - 4 = 10x - 4 \longrightarrow y'' = 10$$

$$y'' + x y' - y = (10) + x(10x - 4) - (5x^2 - 4x + 3)$$

$$= 10 + 10x^2 - 4x - 5x^2 + 4x - 3 = 5x^2 + 7 \quad \text{Oui}$$

$$f_4(x) = 3/x \quad \text{et} \quad (E_4) : 3y' + y^2 = 0$$

$$y = 3/x \longrightarrow y' = 3(1/x)' = 3(-1/x^2) = -3/x^2$$

$$3y' + y^2 = 3(-3/x^2) + (3/x)^2 = -9/x^2 + 9/x^2 = 0 \quad \text{Oui}$$

$$f_5(x) = k \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad (E_5) : y'' + \omega^2 y = 0$$

$$y = k \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow y' = k(\cos u)' = k(-\sin u \times u') = k(-\sin \omega t \times \omega) = -\omega k \sin \omega t$$

$$\longrightarrow y'' = -\omega k(\sin u)' = -\omega k(\cos u \times u') = -\omega^2 k \cos \omega t$$

$$y'' + \omega^2 y = \dots$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3 \quad \text{et} \quad (E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$$

$$y = 5x^2 - 4x + 3 \longrightarrow y' = 5(2x) - 4 = 10x - 4 \longrightarrow y'' = 10$$

$$y'' + x y' - y = (10) + x(10x - 4) - (5x^2 - 4x + 3)$$

$$= 10 + 10x^2 - 4x - 5x^2 + 4x - 3 = 5x^2 + 7 \quad \text{Oui}$$

$$f_4(x) = 3/x \quad \text{et} \quad (E_4) : 3y' + y^2 = 0$$

$$y = 3/x \longrightarrow y' = 3(1/x)' = 3(-1/x^2) = -3/x^2$$

$$3y' + y^2 = 3(-3/x^2) + (3/x)^2 = -9/x^2 + 9/x^2 = 0 \quad \text{Oui}$$

$$f_5(x) = k \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad (E_5) : y'' + \omega^2 y = 0$$

$$y = k \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow y' = k(\cos u)' = k(-\sin u \times u') = k(-\sin \omega t \times \omega) = -\omega k \sin \omega t$$

$$\longrightarrow y'' = -\omega k(\sin u)' = -\omega k(\cos u \times u') = -\omega^2 k \cos \omega t$$

$$y'' + \omega^2 y = (-\omega^2 k \cos \omega t) + \omega^2 (k \cos(\omega t + \varphi)) = \dots$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4x + 3 \quad \text{et} \quad (E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$$

$$y = 5x^2 - 4x + 3 \longrightarrow y' = 5(2x) - 4 = 10x - 4 \longrightarrow y'' = 10$$

$$y'' + x y' - y = (10) + x(10x - 4) - (5x^2 - 4x + 3)$$

$$= 10 + 10x^2 - 4x - 5x^2 + 4x - 3 = 5x^2 + 7 \quad \text{Oui}$$

$$f_4(x) = 3/x \quad \text{et} \quad (E_4) : 3y' + y^2 = 0$$

$$y = 3/x \longrightarrow y' = 3(1/x)' = 3(-1/x^2) = -3/x^2$$

$$3y' + y^2 = 3(-3/x^2) + (3/x)^2 = -9/x^2 + 9/x^2 = 0 \quad \text{Oui}$$

$$f_5(x) = k \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad (E_5) : y'' + \omega^2 y = 0$$

$$y = k \cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow y' = k(\cos u)' = k(-\sin u \times u') = k(-\sin \omega t \times \omega) = -\omega k \sin \omega t$$

$$\longrightarrow y'' = -\omega k(\sin u)' = -\omega k(\cos u \times u') = -\omega^2 k \cos \omega t$$

$$y'' + \omega^2 y = (-\omega^2 k \cos \omega t) + \omega^2(k \cos(\omega t + \varphi)) = -\omega^2 k \cos \omega t + \omega^2 k \cos \omega t = 0 \quad \text{Oui}$$

2°) Caractérisez les équations différentielles  $(E_i)$

$(E_1) : x y' - 2y = 0$       équation différentielle

...



2°) Caractérissez les équations différentielles  $(E_i)$

$(E_1) : x y' - 2y = 0$  équation différentielle

linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients non constants

$(E_2) : y'' - y = x$  équation différentielle

...

2°) Caractérissez les équations différentielles  $(E_i)$

$(E_1) : x y' - 2y = 0$  équation différentielle

linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients non constants

$(E_2) : y'' - y = x$  équation différentielle

linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre à coefficients non constants

$(E_3) : y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$  équation différentielle

...

## 2°) Caractérisez les équations différentielles ( $E_i$ )

( $E_1$ ) :  $x y' - 2y = 0$  équation différentielle

linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients non constants

( $E_2$ ) :  $y'' - y = x$  équation différentielle

linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre à coefficients non constants

( $E_3$ ) :  $y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$  équation différentielle

linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre à coefficients non constants

( $E_4$ ) :  $3y' + y^2 = 0$  équation différentielle

...

## 2°) Caractérissez les équations différentielles ( $E_i$ )

( $E_1$ ) :  $x y' - 2y = 0$  équation différentielle

linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients non constants

( $E_2$ ) :  $y'' - y = x$  équation différentielle

linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre à coefficients non constants

( $E_3$ ) :  $y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$  équation différentielle

linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre à coefficients non constants

( $E_4$ ) :  $3y' + y^2 = 0$  équation différentielle

non linéaire et du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants

( $E_5$ ) :  $y'' + \omega^2 y = 0$  équation différentielle

...

## 2°) Caractérissez les équations différentielles ( $E_i$ )

( $E_1$ ) :  $x y' - 2y = 0$  équation différentielle

linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients non constants

( $E_2$ ) :  $y'' - y = x$  équation différentielle

linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre à coefficients non constants

( $E_3$ ) :  $y'' + x y' - y = 5x^2 + 7$  équation différentielle

linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre à coefficients non constants

( $E_4$ ) :  $3y' + y^2 = 0$  équation différentielle

non linéaire et du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants

( $E_5$ ) :  $y'' + \omega^2 y = 0$  équation différentielle

linéaire et du 2<sup>ème</sup> ordre à coefficients constants

## Exercice 2 :

Déterminez pour les 4 cas suivants

l'équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre

dont  $f$  est solution :

1°)  $f(x) = e^{2x}$

2°)  $f(x) = -2 e^{4x}$

3°)  $f(x) = 4 e^{-5x}$

4°)  $f(x) = 10 + e^{-2x}$

## Exo 2 : Déterminez pour les 4 cas suivants l'équation différentielle

linéaire du 1<sup>er</sup> ordre dont f est solution.

1°)  $f(x) = e^{2x}$       équation différentielle *linéaire du 1<sup>er</sup> ordre* :  $ay + by' = c$

$$y = e^{2x} \longrightarrow y' = (e^u)' = e^u \times u' = e^{2x} \times 2 = 2 e^{2x}$$

## Exo 2 : Déterminez pour les 4 cas suivants l'équation différentielle

linéaire du 1<sup>er</sup> ordre dont f est solution.

1°)  $f(x) = e^{2x}$  équation différentielle *linéaire du 1<sup>er</sup> ordre* :  $ay + by' = c$

$$y = e^{2x} \longrightarrow y' = (e^u)' = e^u \times u' = e^{2x} \times 2 = 2 e^{2x} = 2 y$$

$$y' = 2y \iff 2y - 1y' = 0$$

2°)  $f(x) = -2 e^{4x} = y$



**Exo 2 : Déterminez pour les 4 cas suivants l'équation différentielle**  
**linéaire du 1<sup>er</sup> ordre dont f est solution.**

1°)  $f(x) = e^{2x}$  équation différentielle *linéaire du 1<sup>er</sup> ordre* :  $ay + by' = c$

$$y = e^{2x} \longrightarrow y' = (e^u)' = e^u \times u' = e^{2x} \times 2 = 2 e^{2x} = 2 y$$

$$y' = 2y \longleftrightarrow 2y - 1y' = 0$$

2°)  $f(x) = -2 e^{4x} = y \longrightarrow y' = -2 (e^u)' = -2 e^u \times u' = -2 e^{4x} \times 4$

## Exo 2 : Déterminez pour les 4 cas suivants l'équation différentielle

linéaire du 1<sup>er</sup> ordre dont f est solution.

1°)  $f(x) = e^{2x}$  équation différentielle *linéaire du 1<sup>er</sup> ordre* :  $ay + by' = c$

$$y = e^{2x} \longrightarrow y' = (e^u)' = e^u \times u' = e^{2x} \times 2 = 2 e^{2x} = 2 y$$

$$y' = 2y \iff 2y - 1y' = 0$$

2°)  $f(x) = -2 e^{4x} = y \longrightarrow y' = -2 (e^u)' = -2 e^u \times u' = -2 e^{4x} \times 4 = 4 y$

$$y' = 4y \iff 4y - 1y' = 0$$

3°)  $f(x) = 4 e^{-5x} = y$

## Exo 2 : Déterminez pour les 4 cas suivants l'équation différentielle

linéaire du 1<sup>er</sup> ordre dont f est solution.

1°)  $f(x) = e^{2x}$  équation différentielle *linéaire du 1<sup>er</sup> ordre* :  $ay + by' = c$

$$y = e^{2x} \longrightarrow y' = (e^u)' = e^u \times u' = e^{2x} \times 2 = 2 e^{2x} = 2 y$$

$$y' = 2y \iff 2y - 1y' = 0$$

2°)  $f(x) = -2 e^{4x} = y \longrightarrow y' = -2 (e^u)' = -2 e^u \times u' = -2 e^{4x} \times 4 = 4 y$

$$y' = 4y \iff 4y - 1y' = 0$$

3°)  $f(x) = 4 e^{-5x} = y \longrightarrow y' = 4 (e^u)' = 4 e^u \times u' = 4 e^{-5x} \times (-5)$

**Exo 2 : Déterminez pour les 4 cas suivants l'équation différentielle**  
**linéaire du 1<sup>er</sup> ordre dont f est solution.**

1°)  $f(x) = e^{2x}$  équation différentielle *linéaire du 1<sup>er</sup> ordre* :  $ay + by' = c$

$$y = e^{2x} \longrightarrow y' = (e^u)' = e^u \times u' = e^{2x} \times 2 = 2 e^{2x} = 2 y$$

$$y' = 2y \iff 2y - 1y' = 0$$

2°)  $f(x) = -2 e^{4x} = y \longrightarrow y' = -2 (e^u)' = -2 e^u \times u' = -2 e^{4x} \times 4 = 4 y$

$$y' = 4y \iff 4y - 1y' = 0$$

3°)  $f(x) = 4 e^{-5x} = y \longrightarrow y' = 4 (e^u)' = 4 e^u \times u' = 4 e^{-5x} \times (-5) = -5 y$

$$y' = -5y \iff 5y + 1y' = 0$$

4°)  $f(x) = 10 + e^{-2x} = y$

**Exo 2 : Déterminez pour les 4 cas suivants l'équation différentielle**  
**linéaire du 1<sup>er</sup> ordre dont f est solution.**

1°)  $f(x) = e^{2x}$       équation différentielle *linéaire du 1<sup>er</sup> ordre* :  $ay + by' = c$

$$y = e^{2x} \longrightarrow y' = (e^u)' = e^u \times u' = e^{2x} \times 2 = 2 e^{2x} = 2 y$$

$$y' = 2y \iff 2y - 1y' = 0$$

2°)  $f(x) = -2 e^{4x} = y \longrightarrow y' = -2 (e^u)' = -2 e^u \times u' = -2 e^{4x} \times 4 = 4 y$

$$y' = 4y \iff 4y - 1y' = 0$$

3°)  $f(x) = 4 e^{-5x} = y \longrightarrow y' = 4 (e^u)' = 4 e^u \times u' = 4 e^{-5x} \times (-5) = -5 y$

$$y' = -5y \iff 5y + 1y' = 0$$

4°)  $f(x) = 10 + e^{-2x} = y$

$$4^\circ) f(x) = 10 + e^{-2x} = y$$

$$\rightarrow y' = (10)' + (e^u)' = 0 + e^u \times u' = e^{-2x} \times (-2)$$

$$4^\circ) f(x) = 10 + e^{-2x} = y \quad \longrightarrow \quad e^{-2x} = y - 10$$

$$\longrightarrow y' = (10)' + (e^u)' = 0 + e^u \times u' = e^{-2x} \times (-2) = -2 (y - 10)$$

$$4^\circ) f(x) = 10 + e^{-2x} = y \quad \longrightarrow \quad e^{-2x} = y - 10$$

$$\longrightarrow y' = (10)' + (e^u)' = 0 + e^u \times u' = e^{-2x} \times (-2) = -2 (y - 10)$$

$$y' = -2 (y - 10) = -2y + 20 \quad \longleftrightarrow \quad 2y + 1y' = 20$$



$$4^\circ) f(x) = 10 + e^{-2x} = y \quad \longrightarrow \quad e^{-2x} = y - 10$$

$$\longrightarrow y' = (10)' + (e^u)' = 0 + e^u \times u' = e^{-2x} \times (-2) = -2 (y - 10)$$

$$y' = -2 (y - 10) = -2y + 20 \quad \longleftrightarrow \quad 2y + 1y' = 20$$

$$5^\circ) f(x) = 3 - 2 e^{5x} = y$$

$$4^\circ) f(x) = 10 + e^{-2x} = y \quad \longrightarrow \quad e^{-2x} = y - 10$$

$$\longrightarrow y' = (10)' + (e^u)' = 0 + e^u \times u' = e^{-2x} \times (-2) = -2 (y - 10)$$

$$y' = -2 (y - 10) = -2y + 20 \quad \longleftrightarrow \quad 2y + 1y' = 20$$

$$5^\circ) f(x) = 3 - 2 e^{5x} = y$$

$$y' = (3)' - 2 (e^u)' = 0 - 2 e^u \times u' = -2 e^{5x} \times 5 = -10 e^{5x}$$

$$4^\circ) f(x) = 10 + e^{-2x} = y \quad \longrightarrow \quad e^{-2x} = y - 10$$

$$\longrightarrow y' = (10)' + (e^u)' = 0 + e^u \times u' = e^{-2x} \times (-2) = -2 (y - 10)$$

$$y' = -2 (y - 10) = -2y + 20 \quad \longleftrightarrow \quad 2y + 1y' = 20$$

$$5^\circ) f(x) = 3 - 2 e^{5x} = y \quad \longrightarrow \quad e^{5x} = (y - 3) / (-2) = -0,5 y + 1,5$$

$$y' = (3)' - 2 (e^u)' = 0 - 2 e^u \times u' = -2 e^{5x} \times 5 = -10 e^{5x}$$

$$= -10 (-0,5 y + 1,5) = 5y - 15$$

$$4^\circ) f(x) = 10 + e^{-2x} = y \quad \longrightarrow \quad e^{-2x} = y - 10$$

$$\longrightarrow y' = (10)' + (e^u)' = 0 + e^u \times u' = e^{-2x} \times (-2) = -2 (y - 10)$$

$$y' = -2 (y - 10) = -2y + 20 \quad \longleftrightarrow \quad 2y + 1y' = 20$$

$$5^\circ) f(x) = 3 - 2 e^{5x} = y \quad \longrightarrow \quad e^{5x} = (y - 3) / (-2) = -0,5 y + 1,5$$

$$y' = (3)' - 2 (e^u)' = 0 - 2 e^u \times u' = -2 e^{5x} \times 5 = -10 e^{5x}$$

$$= -10 (-0,5 y + 1,5) = 5y - 15$$

$$y' = 5y - 15 \quad \longleftrightarrow \quad -5y + 1y' = -15$$

## Exercice 3 :

Déterminez la fonction  $f$  qui satisfait les conditions suivantes :

$f$  est une fonction polynomiale de degré 2

$$f(1) = 1$$

$f$  est solution de l'équation différentielle

$$x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$$

## Exercice 3 :

Déterminez la fonction  $f$  qui satisfait les conditions suivantes :

$f$  est une fonction  $f(x)$  polynomiale de degré 2

$$f(1) = 1$$

$f$  est solution de l'équation différentielle

$$x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$$

$y$  désigne  $f(x)$

## Exercice 3 :

Déterminez la fonction  $f$  qui satisfait les conditions suivantes :

$f$  est une fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = 1$

$f$  est solution de l'équation différentielle

$$x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$$

$y$  désigne  $f(x)$

f est une fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f(1) = 1$$

f est solution de l'équation différentielle

$$x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$$

y désigne  $f(x)$

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y' = \dots \quad \Rightarrow \quad y'' = \dots$$

que l'on met dans l'équa. diff.

que l'on résout pour déterminer a, b et c



**Exo 3** :  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2  $\iff f(x) = ax^2 + bx + c$

**Exo 3** :  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2  $\iff f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f(1) = 1 \implies \dots$$

**Exo 3 :**  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2  $\iff f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = 1 \implies a + b + c = 1 \implies$  impossible de déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$

$f$  est solution de  $x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$

$y = ax^2 + bx + c \implies \dots$

**Exo 3 :**  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2  $\iff f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = 1 \implies a + b + c = 1 \implies$  impossible de déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$

$f$  est solution de  $x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$

$y = ax^2 + bx + c \implies y' = a(2x) + b = 2ax + b \implies \dots$

**Exo 3 :**  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2  $\iff f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = 1 \implies a + b + c = 1 \implies$  impossible de déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$

$f$  est solution de  $x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$

$y = ax^2 + bx + c \implies y' = a(2x) + b = 2ax + b \implies y'' = 2a$

$x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3 \implies \dots$

**Exo 3 :**  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2  $\iff f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = 1 \implies a + b + c = 1 \implies$  impossible de déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$

$f$  est solution de  $x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$

$y = ax^2 + bx + c \implies y' = a(2x) + b = 2ax + b \implies y'' = 2a$

$x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3 \implies x^2(2a) - x(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = 5x^2 + 3$

$\implies \dots x^2 + \dots x + \dots = 0$

**Exo 3 :**  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2  $\iff f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = 1 \implies a + b + c = 1 \implies$  impossible de déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$

$f$  est solution de  $x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$

$y = ax^2 + bx + c \implies y' = a(2x) + b = 2ax + b \implies y'' = 2a$

$x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3 \implies x^2(2a) - x(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = 5x^2 + 3$

$$\iff 2ax^2 - 2ax^2 - bx + ax^2 + bx + c - 5x^2 - 3 = 0$$

**Exo 3 :**  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2  $\iff f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = 1 \implies a + b + c = 1 \implies$  impossible de déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$

$f$  est solution de  $x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$

$y = ax^2 + bx + c \implies y' = a(2x) + b = 2ax + b \implies y'' = 2a$

$x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3 \implies x^2(2a) - x(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = 5x^2 + 3$

$$\iff 2ax^2 - 2ax^2 - bx + ax^2 + bx + c - 5x^2 - 3 = 0$$

$$\iff (a - 5)x^2 + 0x + (c - 3) = 0$$



**Exo 3 :**  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2  $\iff f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = 1 \implies a + b + c = 1 \implies$  impossible de déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$

$f$  est solution de  $x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$

$y = ax^2 + bx + c \implies y' = a(2x) + b = 2ax + b \implies y'' = 2a$

$x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3 \implies x^2(2a) - x(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = 5x^2 + 3$

$$\iff 2ax^2 - 2ax^2 - bx + ax^2 + bx + c - 5x^2 - 3 = 0$$

$$\iff (a - 5)x^2 + 0x + (c - 3) = 0$$

L'égalité est vraie pour tous les  $x$  de  $\mathbb{R} \implies$  la seule possibilité est ...

**Exo 3 :**  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2  $\iff f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = 1 \implies a + b + c = 1 \implies$  impossible de déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$

$f$  est solution de  $x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$

$y = ax^2 + bx + c \implies y' = a(2x) + b = 2ax + b \implies y'' = 2a$

$x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3 \implies x^2(2a) - x(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = 5x^2 + 3$

$$\iff 2ax^2 - 2ax^2 - bx + ax^2 + bx + c - 5x^2 - 3 = 0$$

$$\iff (a - 5)x^2 + 0x + (c - 3) = 0$$

L'égalité est vraie pour tous les  $x$  de  $\mathbb{R} \implies$  la seule possibilité est  $0x^2 + 0 = 0$

$\implies \dots$

**Exo 3 :**  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2  $\iff f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(1) = 1 \implies a + b + c = 1 \implies$  impossible de déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$

$f$  est solution de  $x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$

$y = ax^2 + bx + c \implies y' = a(2x) + b = 2ax + b \implies y'' = 2a$

$x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3 \implies x^2(2a) - x(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = 5x^2 + 3$

$$\iff 2ax^2 - 2ax^2 - bx + ax^2 + bx + c - 5x^2 - 3 = 0$$

$$\iff (a - 5)x^2 + 0x + (c - 3) = 0$$

L'égalité est vraie pour tous les  $x$  de  $\mathbb{R} \implies$  la seule possibilité est  $0x^2 + 0 = 0$

$$\implies a = 5 \text{ et } c = 3$$

$f(1) = 1 \implies \dots$

**Exo 3 :**  $f$  est une fonction polynomiale de degré 2  $\iff f(x) = ax^2 + bx + c$

$f$  est solution de  $x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3$

$$y = ax^2 + bx + c \implies y' = a(2x) + b = 2ax + b \implies y'' = 2a$$

$$x^2 y'' - x y' + y = 5x^2 + 3 \implies x^2(2a) - x(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = 5x^2 + 3$$

$$\iff 2ax^2 - 2ax^2 - bx + ax^2 + bx + c - 5x^2 - 3 = 0$$

$$\iff (a - 5)x^2 + 0x + (c - 3) = 0$$

L'égalité est vraie pour tous les  $x$  de  $\mathbb{R} \implies$  la seule possibilité est  $0x^2 + 0 = 0$

$$\implies a = 5 \text{ et } c = 3$$

$$f(1) = 1 \implies 5(1^2) + b(1) + 3 = 1 \implies b = 1 - 5 - 3 = -7$$

**Réponse :**  $f(x) = 5x^2 - 7x + 3$

## Exercice 3 bis :

Déterminez la fonction  $f$  qui satisfait les conditions suivantes :

$$f(x) = kx^3 + bx$$

$$f(2) = 18$$

$f$  est solution de l'équation différentielle

$$x^2 y'''' - 2 y' = 6$$

$$f(x) = kx^3 + bx = y \longrightarrow y' = k(3x^2) + b = 3kx^2 + b$$

$$\longrightarrow y'' = 3k(2x) = 6kx \longrightarrow y''' = 6k$$

$$x^2 y''' - y' = 6 \longrightarrow x^2 (6k) - 2(3kx^2 + b) = 6$$

$$\longrightarrow 6kx^2 - 6kx^2 - 2b = 6 \longrightarrow -2b = 6 \longrightarrow b = -3$$

$$f(2) = 18 \longrightarrow k(2^3) + b(2) = 18 \longrightarrow 8k - 6 = 18$$

$$\longrightarrow 8k = 24 \longrightarrow k = 3$$

$$\text{Réponse : } f(x) = 3x^3 - 3x$$