

Exercice 22 :

Soit le nombre $A = 2,34234234\underline{234}\dots$

Démontrez qu'il est la limite d'une somme de termes d'une suite géométrique, et déduisez-en qu'il est un nombre rationnel.

Exercice 22 : $A = 2,34234234234\underline{234}\dots$

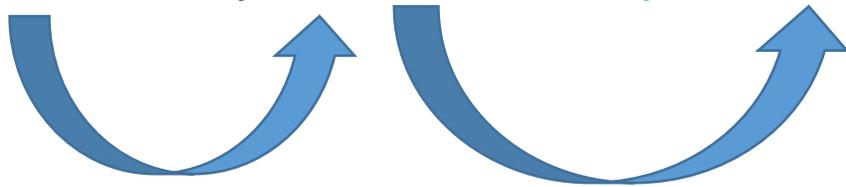
Démontrez qu'il est la limite d'une somme de termes d'une suite géométrique, et déduisez-en qu'il est un nombre rationnel.

$$A = 2,34 + 0,00234 + 0,00000234 + \dots = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

Exercice 22 : $A = 2,34234234234\underline{234}\dots$

Démontrez qu'il est la limite d'une somme de termes d'une suite géométrique, et déduisez-en qu'il est un nombre rationnel.

$$A = 2,34 + 0,00234 + 0,00000234 + \dots = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$



écarts $-0,00233766$

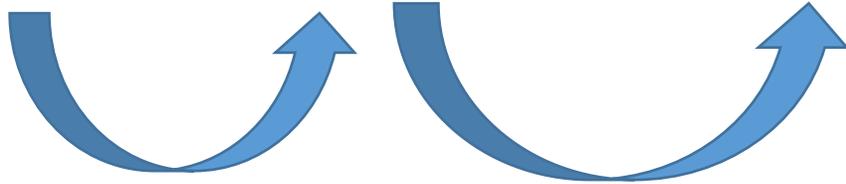
$-2,33766$

→ suite non arithmétique

Exercice 22 : $A = 2,34234234234\underline{234}\dots$

Démontrez qu'il est la limite d'une somme de termes d'une suite géométrique, et déduisez-en qu'il est un nombre rationnel.

$$A = 2,34 + 0,00234 + 0,00000234 + \dots = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$



rappports

0,001

0,001

→ suite géométrique

Exercice 22 : $A = 2,34234234\underline{234}...$

Démontrez qu'il est la limite d'une somme de termes d'une suite géométrique, et déduisez-en qu'il est un nombre rationnel.

$$A = 2,34 + 0,00234 + 0,00000234 + \dots = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$u_{n+1} = 10^{-3} u_n \text{ donc la suite est géométrique de raison } 10^{-3}$$

Exercice 22 : $A = 2,34234234\underline{234}\dots$

Démontrez qu'il est la limite d'une somme de termes d'une suite géométrique, et déduisez-en qu'il est un nombre rationnel.

$$A = 2,34 + 0,00234 + 0,00000234 + \dots = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$u_{n+1} = 10^{-3} u_n$ donc la suite est géométrique de raison 10^{-3}

$$\text{donc } S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

$$S = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 2,34 \frac{1 - (10^{-3})^n}{1 - 10^{-3}} \quad \mathbf{A} = \dots ?$$

Exercice 22 : $A = 2,34234234\underline{234}\dots$

Démontrez qu'il est la limite d'une somme de termes d'une suite géométrique, et déduisez-en qu'il est un nombre rationnel.

$$A = 2,34 + 0,00234 + 0,00000234 + \dots = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$u_{n+1} = 10^{-3} u_n$ donc la suite est géométrique de raison 10^{-3}

$$\text{donc } S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

$$S = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 2,34 \frac{1 - (10^{-3})^n}{1 - 10^{-3}} \quad \mathbf{A} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S$$

Exercice 22 : $A = 2,34234234\underline{234}\dots$

$$A = 2,34 + 0,00234 + 0,00000234 + \dots = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$u_{n+1} = 10^{-3} u_n$ donc la suite est géométrique de raison 10^{-3}

Soit $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ La suite est géométrique

$$\text{donc } S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q} = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 2,34 \frac{1 - (10^{-3})^n}{1 - 10^{-3}}$$

A est la limite de S lorsque n tend vers $+\infty$

$0 < q < 1$ donc q^n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

$$A = 2,34 \frac{1 - 0}{1 - 10^{-3}} = 2,34 \frac{1}{0,999} = \frac{2,34}{0,999} = \frac{2340}{999} \quad \text{qui est bien une fraction d'entiers}$$

Exercice 23 :

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par :

$$u_{n+1} = 3u_n - 4$$

$$u_0 = a$$

$$v_n = u_n + b$$

- 1°) Déterminez b pour que la suite (v_n) soit géométrique.
- 2°) Déterminez a pour que la suite (u_n) soit constante.
- 3°) Déterminez a pour que la suite (v_n) soit strictement croissante.

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

1°) Déterminez b pour que la suite (v_n) soit géométrique.

... ?

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

1°) Déterminez b pour que la suite (v_n) soit géométrique.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = C^{\text{te}} = q \quad \longleftrightarrow \quad \dots$$

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

1°) Autre méthode :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = C^{te} = q \iff \frac{u_{n+1} + b}{u_n + b} = q \iff u_{n+1} + b = q (u_n + b)$$

$$\iff u_{n+1} + b = q u_n + q b \iff b - q b = q u_n - u_{n+1}$$

$$\iff b (1 - q) = q u_n - (3 u_n - 4)$$

$$\iff b = \frac{q u_n - 3 u_n + 4}{1 - q} = \frac{(q - 3) u_n + 4}{1 - q}$$

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

1°) Autre méthode :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = C^{te} = q \iff \frac{u_{n+1} + b}{u_n + b} = q \iff \dots \iff b = \frac{(q - 3) u_n + 4}{1 - q}$$

q est ...

b est ...

u_n est ...

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

1°) Autre méthode :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = C^{te} = q \iff \frac{u_{n+1} + b}{u_n + b} = q \iff \dots \iff b = \frac{(q - 3) u_n + 4}{1 - q}$$

q est un nombre fixé

b est un nombre fixé

u_n est le terme général de la suite (u_n) non constante

$\implies u_n$ est un nombre non fixé

La seule possibilité que b soit un nombre fixé est $(q - 3) = 0$

$$\implies q = 3 \implies b = (0 u_n + 4) / (1 - 3) = -2$$

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

1°) Déterminez b pour que la suite (v_n) soit géométrique.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = C^{\text{te}} = q \iff \frac{u_{n+1} + b}{u_n + b} = q \iff \frac{(3u_n - 4) + b}{u_n + b} = q$$

Lorsque n varie, seul u_n varie.

Donc la seule possibilité que la fraction ne varie pas est qu'elle se simplifie en ...

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

1°) Déterminez b pour que la suite (v_n) soit géométrique.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = C^{\text{te}} = q \iff \frac{u_{n+1} + b}{u_n + b} = q \iff \frac{(3 u_n - 4) + b}{u_n + b} = q$$

Lorsque n varie, seul u_n varie.

Donc la seule possibilité que la fraction ne varie pas est qu'elle se simplifie en factorisant le numérateur par le dénominateur :

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

1°) Déterminez b pour que la suite (v_n) soit géométrique.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = C^{te} = q \iff \frac{u_{n+1} + b}{u_n + b} = q \iff \frac{(3 u_n - 4) + b}{u_n + b} = q$$

Lorsque n varie, seul u_n varie. Donc la seule possibilité que la fraction ne varie pas est qu'elle se simplifie en factorisant le numérateur par le dénominateur :

$$\frac{3 u_n - 4 + b}{u_n + b} = q \iff \frac{\dots (\dots) + \dots}{u_n + b} = q$$

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

1°) Déterminez b pour que la suite (v_n) soit géométrique.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = C^{te} = q \iff \frac{u_{n+1} + b}{u_n + b} = q \iff \frac{(3 u_n - 4) + b}{u_n + b} = q$$

Lorsque n varie, seul u_n varie. Donc la seule possibilité que la fraction ne varie pas est qu'elle se simplifie en factorisant le numérateur par le dénominateur :

$$\frac{3 u_n - 4 + b}{u_n + b} = q \iff \frac{3 (u_n + b) - 3b - 4 + b}{u_n + b} = q$$

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

1°) Déterminez b pour que la suite (v_n) soit géométrique.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = C^{te} = q \iff \frac{u_{n+1} + b}{u_n + b} = q \iff \frac{(3 u_n - 4) + b}{u_n + b} = q$$

Lorsque n varie, seul u_n varie. Donc la seule possibilité que la fraction ne varie pas est qu'elle se simplifie en factorisant le numérateur par le dénominateur :

$$\frac{3 u_n - 4 + b}{u_n + b} = q \iff \frac{3 (u_n + b) - 3b - 4 + b}{u_n + b} = q \text{ qui donne } \frac{3 (u_n + b) + 0}{u_n + b} = 3$$

en ne se simplifiant que si ...

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

1°) Déterminez b pour que la suite (v_n) soit géométrique.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = C^{te} = q \iff \frac{u_{n+1} + b}{u_n + b} = q \iff \frac{(3 u_n - 4) + b}{u_n + b} = q$$

Lorsque n varie, seul u_n varie. Donc la seule possibilité que la fraction ne varie pas est qu'elle se simplifie en factorisant le numérateur par le dénominateur :

$$\frac{3 u_n - 4 + b}{u_n + b} = q \iff \frac{3 (u_n + b) - 3b - 4 + b}{u_n + b} = q \text{ qui donne } \frac{3 (u_n + b) + 0}{u_n + b} = 3$$

en ne se simplifiant que si $-3b - 4 + b = 0$ donc $-2b - 4 = 0$ donc $b = -2$

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

Vérification facultative : $b = -2$

$$v_n = u_n + b = u_n - 2$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} = \frac{(3 u_n - 4) - 2}{u_n - 2} = \frac{3 u_n - 6}{u_n - 2} = \frac{3(u_n - 2)}{u_n - 2} = 3 = \text{Cte}$$

Exercice 23: $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

2°) Déterminez a pour que la suite (u_n) soit constante.

Si la suite est constante, $u_{n+1} = u_n$ pour tous les n .

$$\iff u_n = 3 u_n - 4 \iff u_0 = 3 u_0 - 4$$

$$\iff a = 3 a - 4 \iff -2a = -4 \iff a = 2$$

Vérification facultative :

$$u_n = u_0 = 2$$

$$u_{n+1} = 3 u_n - 4 = 3(2) - 4 = 2 = u_n$$

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

3°) Déterminez a pour que la suite (v_n) soit str. croissante.

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3 u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

3°) Déterminez a pour que la suite (v_n) soit str. croissante.

(v_n) str. croissante $\iff v_{n+1} - v_n > 0$

$\iff \dots$

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

3°) Déterminez a pour que la suite (v_n) soit str. croissante.

(v_n) str. croissante $\iff v_{n+1} - v_n > 0$

$$\iff (u_{n+1} + b) - (u_n + b) > 0$$

$$\iff u_{n+1} + b - u_n - b > 0$$

$$\iff u_{n+1} - u_n > 0$$

$$\iff \dots$$

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

3°) Déterminez a pour que la suite (v_n) soit str. croissante.

(v_n) str. croissante $\iff v_{n+1} - v_n > 0$

$$\iff (u_{n+1} + b) - (u_n + b) > 0$$

$$\iff u_{n+1} + b - u_n - b > 0$$

$$\iff u_{n+1} - u_n > 0$$

\iff la suite (u_n) est str. croissante

$$\iff (3u_n - 4) - u_n > 0 \iff 2u_n - 4 > 0$$

$$\iff u_n > 2 \quad \dots$$

Exercice 23 : $u_{n+1} = 3u_n - 4$ $u_0 = a$ $v_n = u_n + b$

3°) Déterminez a pour que la suite (v_n) soit str. croissante.

(v_n) str. croissante $\iff v_{n+1} - v_n > 0$

$$\iff (u_{n+1} + b) - (u_n + b) > 0$$

$$\iff u_{n+1} + b - u_n - b > 0$$

$$\iff u_{n+1} - u_n > 0$$

\iff la suite (u_n) est str. croissante

$$\iff (3u_n - 4) - u_n > 0 \iff 2u_n - 4 > 0$$

$$\iff u_n > 2 \text{ pour tous les } n \implies u_0 > 2 \iff a > 2$$

Exercice 24 :

Une usine dégage 1200 kg de fumées le 01/01/1987.

Chaque jour, les dégagements chutent de 1%.

Déterminez le dégagement journalier moyen
(arrondi à 1 kg près) sur une période de 1 an.

Quel est le jour où le dégagement est le plus proche de cette valeur ?

Exercice 24 : Une usine dégage 1200 kg de fumées le 01/01/1987. Chaque jour, les dégagements chutent de 1%. Déterminez le dégagement journalier moyen (arrondi à 1 kg près) sur une période de 1 an.

Soit la suite (u_n) définie par $u_n =$ la masse dégagée le jour n . $u_1 = 1200$

$u_{n+1} = 0,99 u_n$ donc la suite est **géométrique**.

Exercice 24 : Une usine dégage 1200 kg de fumées le 01/01/1987. Chaque jour, les dégagements chutent de 1%. Déterminez le dégagement journalier moyen (arrondi à 1 kg près) sur une période de 1 an.

Soit la suite (u_n) définie par $u_n =$ la masse dégagée le jour n . $u_1 = 1200$

$u_{n+1} = 0,99 u_n$ donc la suite est géométrique.

Masse totale dégagée en 1 an : $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{365}$

La suite est géométrique

$$\text{donc } S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q} = 1200 \frac{1 - 0,99^{365}}{1 - 0,99} \approx 116937 \text{ kg}$$

$$\text{Production moyenne} = \frac{\text{production totale}}{\text{intervalle de temps}} \approx \frac{116937}{365} \approx 320,37 \text{ kg/jour}$$

Quel est le jour où le dégagement est le plus proche de cette valeur ?

La suite est géométrique,

$$\text{donc } \frac{u_n}{u_m} = q^{n-m} \quad \text{donc } u_n = u_1 q^{n-1}$$

$$\text{On veut } u_n \approx 320,37 \quad \text{donc } 320,37 \approx 1200 (0,99^{n-1})$$

On ne saura résoudre ce type d'équation (où l'inconnue est dans l'exposant) que l'année prochaine, donc seule la calculatrice peut nous aider. Comme la suite est monotone (car décroissante lorsque $0 < q < 1$), les termes les plus proches de $320,37$ donneront n en valeur exacte :

Quel est le jour où le dégagement est le plus proche de cette valeur ?

La suite est géométrique, donc $u_n / u_m = q^{n-m}$ donc $u_n = u_1 q^{n-1}$

On veut $u_n \approx 320,37$ donc $320,37 \approx 1200 (0,99^{n-1})$

On ne saura résoudre ce type d'équation (où l'inconnue est dans l'exposant) que l'année prochaine, donc seule la calculatrice peut nous aider. Comme la suite est monotone (car décroissante lorsque $0 < q < 1$), les termes les plus proches de $320,37$ donneront n en valeur exacte :

$$1200 (0,99^{101-1}) \approx 439,2\dots$$

$$1200 (0,99^{201-1}) \approx 160,7\dots$$

$$1200 (0,99^{132-1}) \approx 321,656\dots \text{ (écart } 1,29\dots \text{)}$$

$$1200 (0,99^{133-1}) \approx 318,439\dots \text{ (écart } 1,93\dots \text{)} \quad 318,43 < 320,37 < 321,65$$

$$\text{donc } 133 > j > 132$$

Réponse : le 132^{ème} jour (le 12 mai) et non pas le 1^{er} juillet (milieu de l'année) qui correspondrait à une suite arithmétique.