Spé chap. 1 # Les fonctions composées

I Définition

u est la fonction $x \mapsto u(x)$

v est la fonction $x \mapsto v(x)$

La fonction notée $v \circ u$ est la fonction définie par

$v \circ u\,(x) = v(\,u(x)\,)$ donc $x \mapsto u(x) \mapsto v(\,u(x)\,)$

$x \longmapsto v \circ u\,(x)$

Remarque :

l'écriture $v \circ u$ est dans le sens inverse des applications $x \mapsto u(x) \mapsto v \circ u\,(x)$

C'est l'image d'un … ?

Spé chap. 1 # Les fonctions composées

I Définition

u est la fonction $x \mapsto u(x)$

v est la fonction $x \mapsto v(x)$

La fonction notée $v \circ u$ est la fonction définie par

$v \circ u\,(x) = v(\,u(x)\,)$ donc $x \mapsto u(x) \mapsto v(\,u(x)\,)$

$x \longmapsto v \circ u\,(x)$

Remarque :

l'écriture $v \circ u$ est dans le sens inverse des applications $x \mapsto u(x) \mapsto v \circ u\,(x)$

C'est l'image d'un antécédent … ?

Spé chap. 1 # Les fonctions composées

I Définition

u est la fonction $x \mapsto u(x)$

v est la fonction $x \mapsto v(x)$

La fonction notée v o u est la fonction définie par

$v \circ u\,(x) = v\,(\,u(x)\,)$ donc $x \mapsto u(x) \mapsto v\,(\,u(x)\,)$

$x \longmapsto v \circ u\,(x)$

Remarque :

l'écriture $v \circ u$ est dans le sens inverse des applications $x \mapsto u(x) \mapsto v \circ u\,(x)$

C'est l'image d'une image d'un antécédent.

Exercice 1

u est la fonction carré

v est la fonction définie par $v(x) = 2x + 1$

Remplissez le tableau.

Que remarquez-vous ?

x	- 2	- 1	0	3
u o v (x)				
v o u (x)				

$u(x) = x^2$ $\quad v(x) = 2x + 1$

$u \circ v(-2) = u(v(-2)) = u(-3) = 9$

Puisque $\quad v(-2) = 2(-2) + 1 = -3$

Et $\quad u(-3) = (-3)^2 = 9$

$$-2 \xmapsto{2x+1} -3 \xmapsto{x^2} 9$$

x	- 2	- 1	0	3
u o v (x)	9			
v o u (x)				

$u(x) = x^2 \qquad v(x) = 2x + 1$

$u \circ v(-2) = u(v(-2)) = u(-3) = 9$

$u \circ v(-1) = u(v(-1)) = u(-1) = 1$

$$-1 \xmapsto{2x+1} -1 \xmapsto{x^2} 1$$

x	- 2	- 1	0	3
u o v (x)	9	1		
v o u (x)				

$u(x) = x^2 \qquad v(x) = 2x + 1$

$u \circ v(-2) = u(v(-2)) = u(-3) = 9$

$u \circ v(-1) = u(v(-1)) = u(-1) = 1$

$u \circ v(0) = u(v(0)) = u(1) = 1$

$$0 \overset{2x+1}{\longmapsto} 1 \overset{x^2}{\longmapsto} 1$$

x	- 2	- 1	0	3
u o v (x)	9	1	1	
v o u (x)				

$u(x) = x^2 \qquad v(x) = 2x + 1$

$u \circ v(-2) = u(v(-2)) = u(-3) = 9$

$u \circ v(-1) = u(v(-1)) = u(-1) = 1$

$u \circ v(0) = u(v(0)) = u(1) = 1$

$u \circ v(3) = u(v(3)) = u(7) = 49$

$$3 \overset{2x+1}{\longmapsto} 7 \overset{x^2}{\longmapsto} 49$$

x	- 2	- 1	0	3
u o v (x)	9	1	1	49
v o u (x)				

$u(x) = x^2 \qquad v(x) = 2x + 1$

$v \circ u(-2) = v(u(-2)) = v(4) = 9$

$-2 \overset{x^2}{\mapsto} 4 \overset{2x+1}{\mapsto} 9$

x	- 2	- 1	0	3
u o v (x)	9	1	1	49
v o u (x)	9			

$u(x) = x^2 \qquad v(x) = 2x + 1$

$v \circ u(-2) = v(u(-2)) = v(4) = 9$

$v \circ u(-1) = v(u(-1)) = v(1) = 3$

$$-1 \overset{x^2}{\longmapsto} 1 \overset{2x+1}{\longmapsto} 3$$

x	- 2	- 1	0	3
u o v (x)	9	1	1	49
v o u (x)	9	3		

$u(x) = x^2 \qquad v(x) = 2x + 1$

$v \circ u\,(-2) = v(\,u(-2)\,) = v(\,4\,) = 9$

$v \circ u\,(-1) = v(\,u(-1)\,) = v(\,1\,) = 3$

$v \circ u\,(0) = v(\,u(0)\,) = v(\,0\,) = 1$

$$0 \xmapsto{x^2} 0 \xmapsto{2x+1} 1$$

x	- 2	- 1	0	3
u o v (x)	9	1	1	49
v o u (x)	9	3	1	

$v \circ u\,(-2) = v\,(\,u\,(-2)\,) = v\,(\,4\,) = 9$

$v \circ u\,(-1) = v\,(\,u\,(-1)\,) = v\,(\,1\,) = 3$

$v \circ u\,(0) = v\,(\,u\,(0)\,) = v\,(\,0\,) = 1$

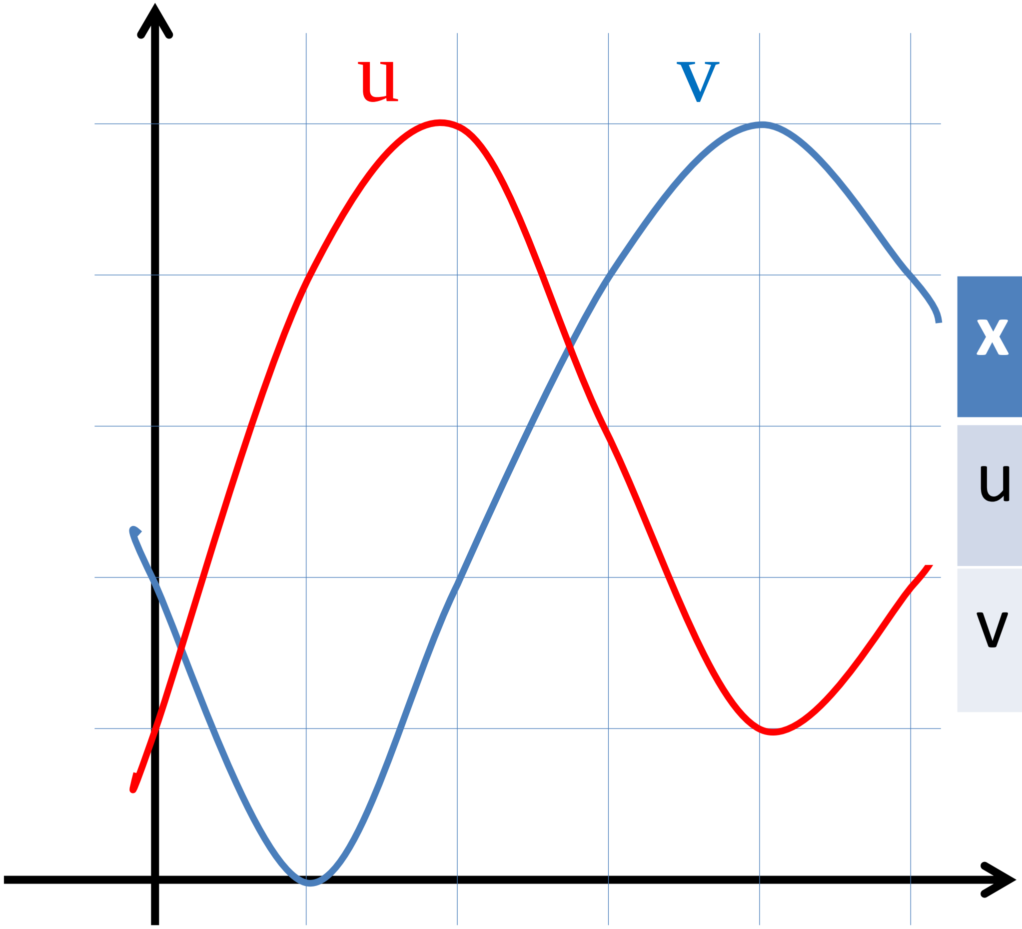
$v \circ u\,(3) = v\,(\,u\,(3)\,) = v\,(\,9\,) = 19$

$$3 \xmapsto{x^2} 9 \xmapsto{2x+1} 19$$

x	**- 2**	**- 1**	**0**	**3**
u o v (x)	9	1	1	49
v o u (x)	9	3	1	19

Exercice 2 (échelle 1 carreau par unité).

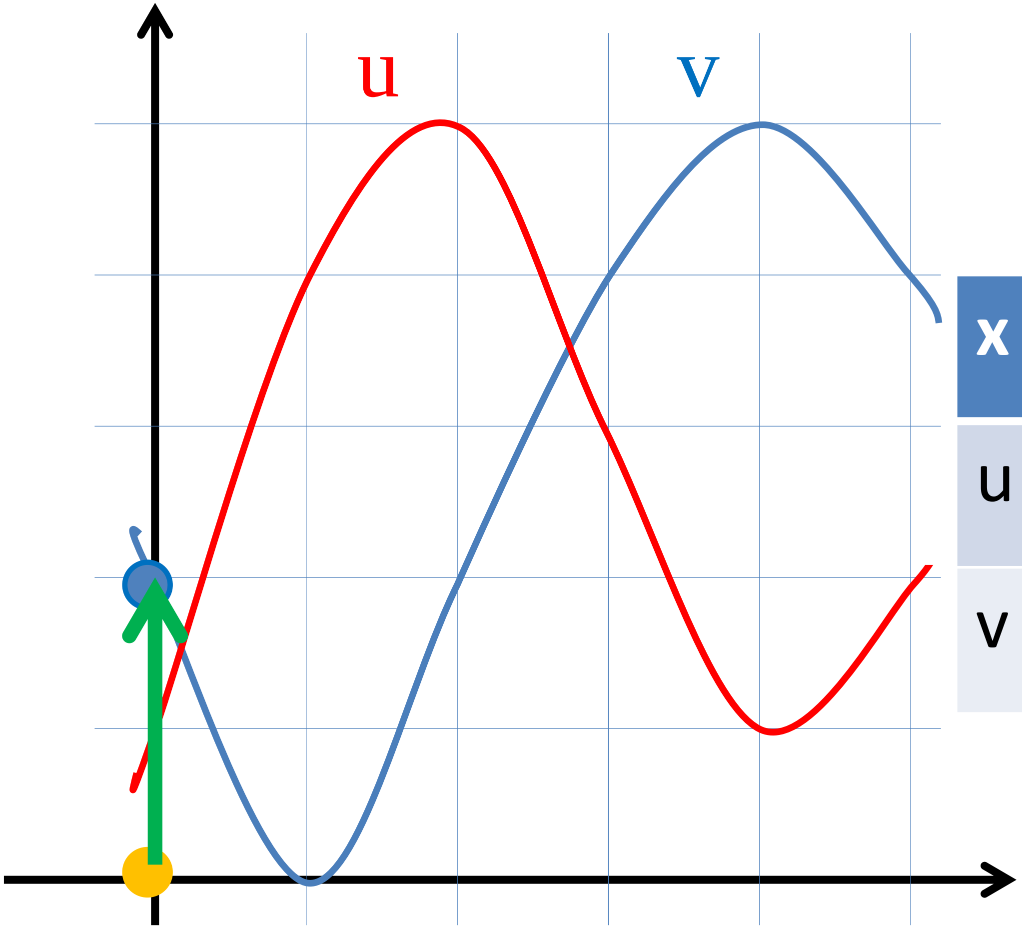
On donne les courbes représentatives de deux fonctions u et v. Remplissez le tableau.



x	0	1	2	3
u o v (x)				
v o u (x)				

u o v (0) = u (v(0))   v(0) = 2

v : x ↦ y



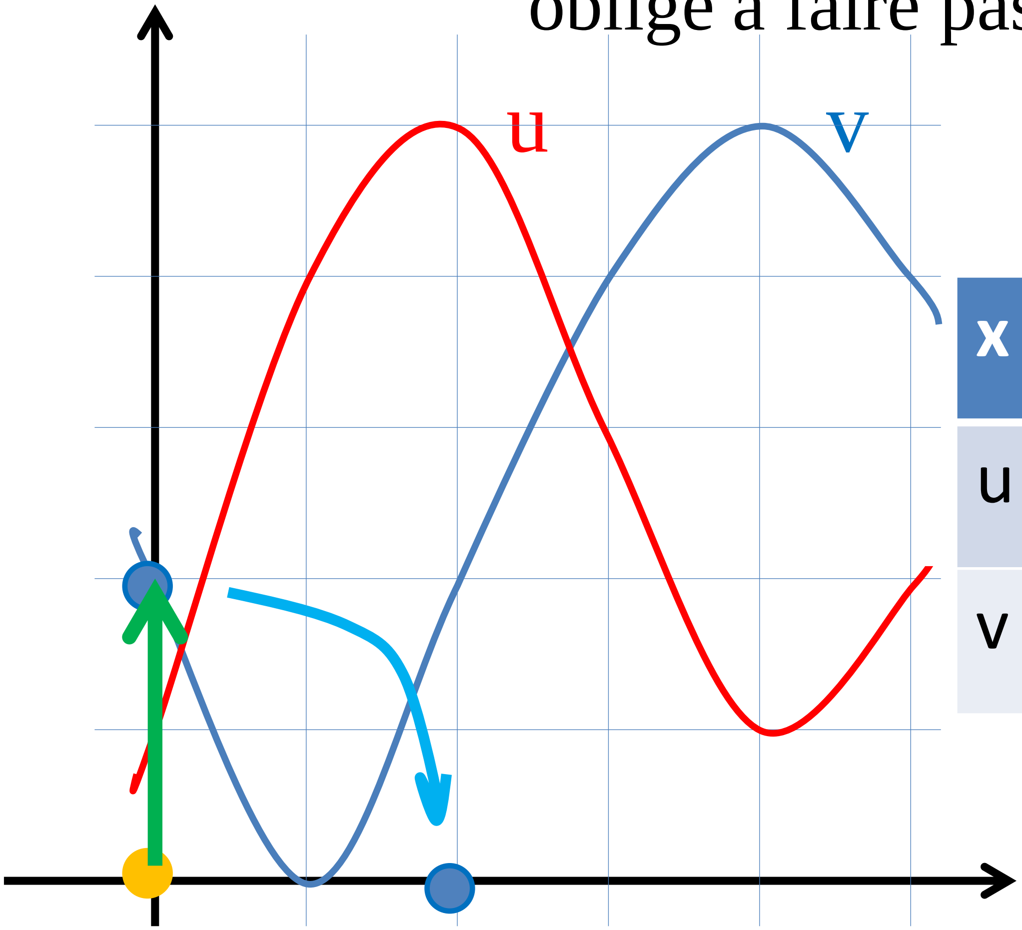
x	0	1	2	3
u o v (x)				
v o u (x)				

u o v (0) = u (v(0))   v(0) = 2   u(2) = ...

Les fct sont représentées   v : x ↦ y   et   u : x ↦ y

donc   v : 0 ↦ 2   et   u : 2 ↦ ...

oblige à faire passer 2 de y en x



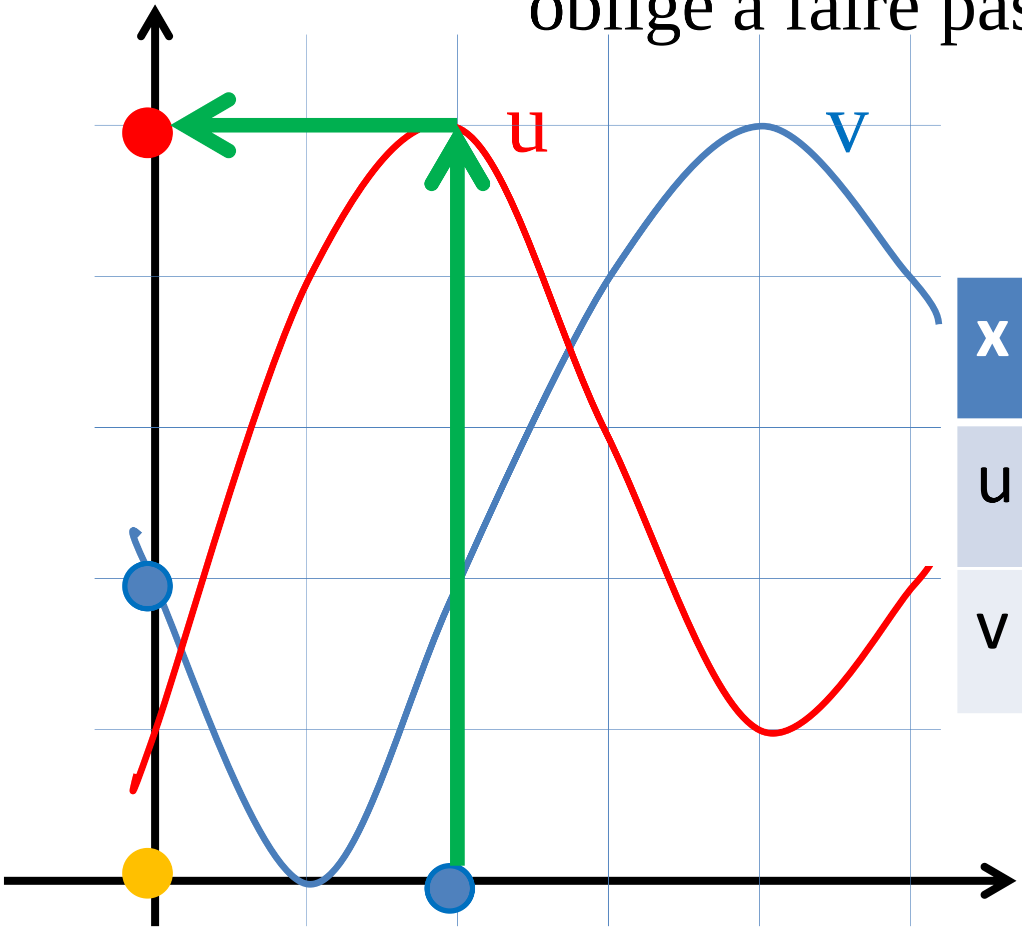
x	0	1	2	3
u o v (x)	...			
v o u (x)				

$u \circ v(0) = u(v(0))$ $v(0) = 2$ $u(2) = 5$

Les fct sont représentées $v : x \mapsto y$ et $u : x \mapsto y$

donc $v : 0 \mapsto 2$ et $u : 2 \mapsto 5$

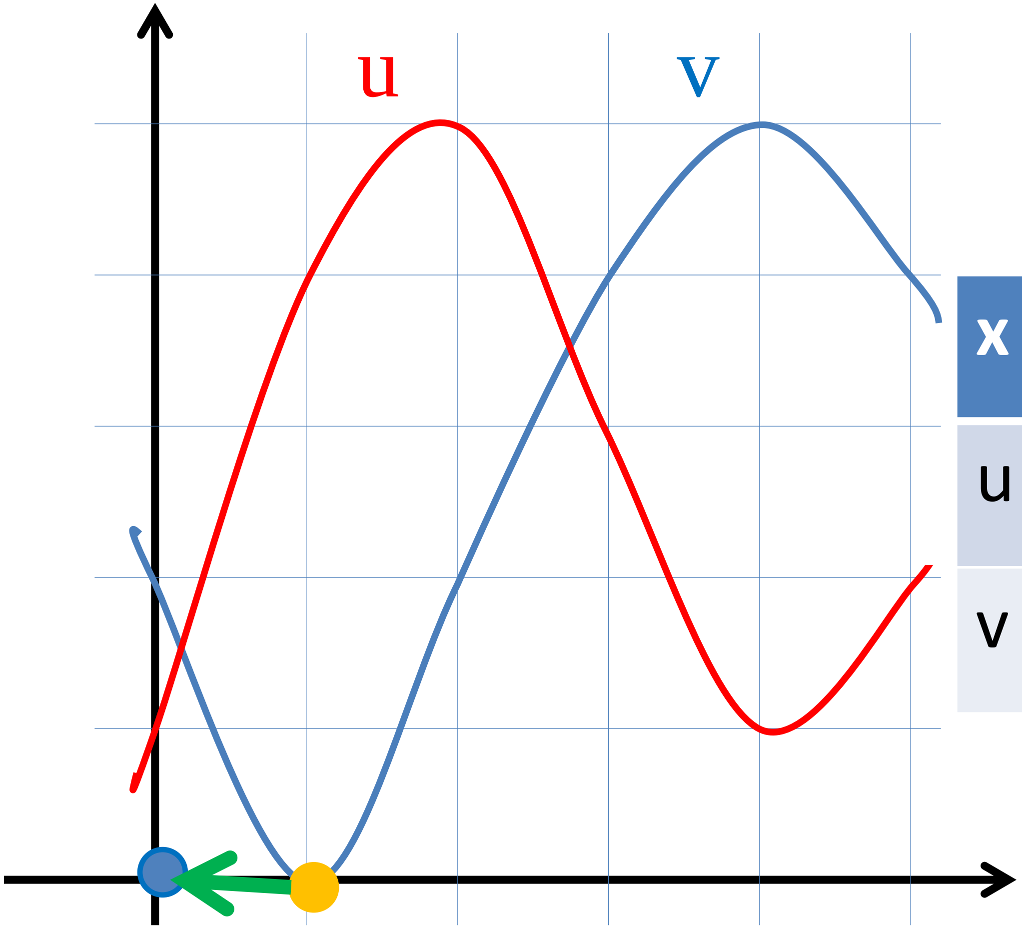
oblige à faire passer 2 de y en x



x	0	1	2	3
u o v (x)	5			
v o u (x)				

u o v (0) = u (v(0))   v(0) = 2   u(2) = 5

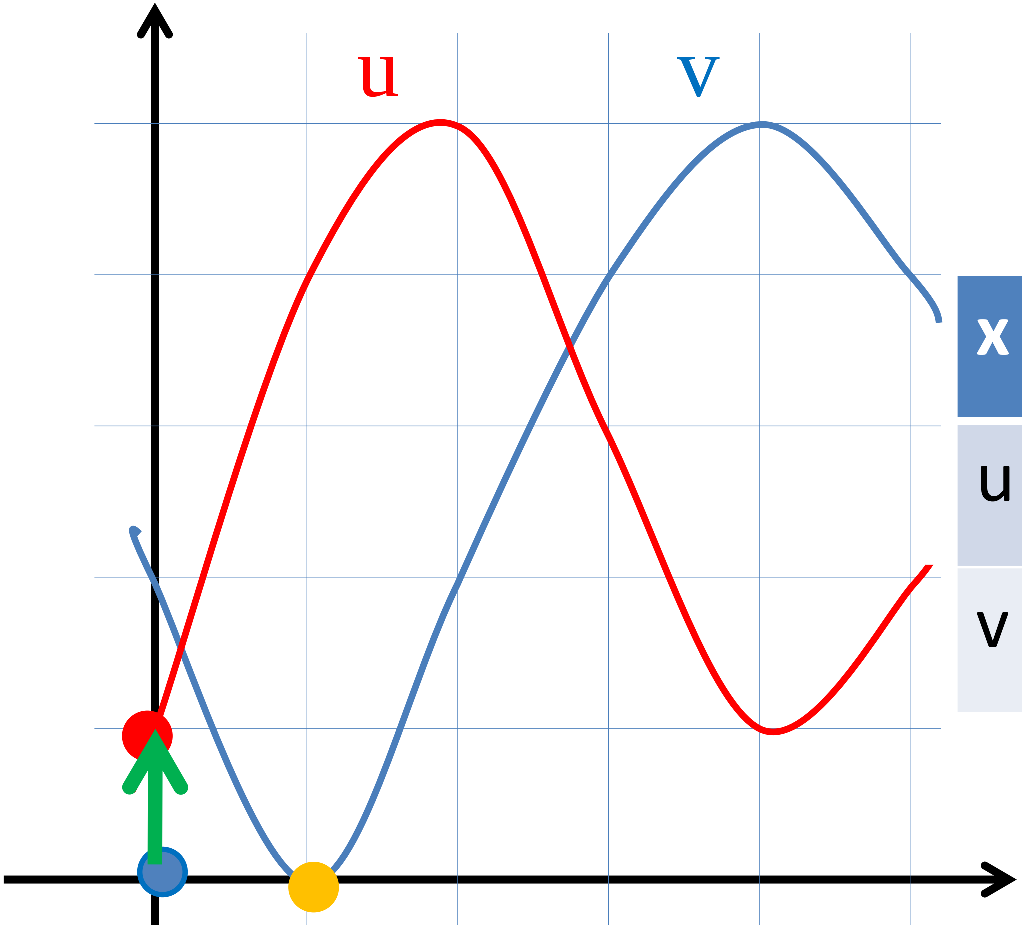
u o v (1) = u (v(1))   v(1) = 0



x	0	1	2	3
u o v (x)	5			
v o u (x)				

u o v (0) = u (v(0))   v(0) = 2   u(2) = 5

u o v (1) = u (v(1))   v(1) = 0   u(0) = 1

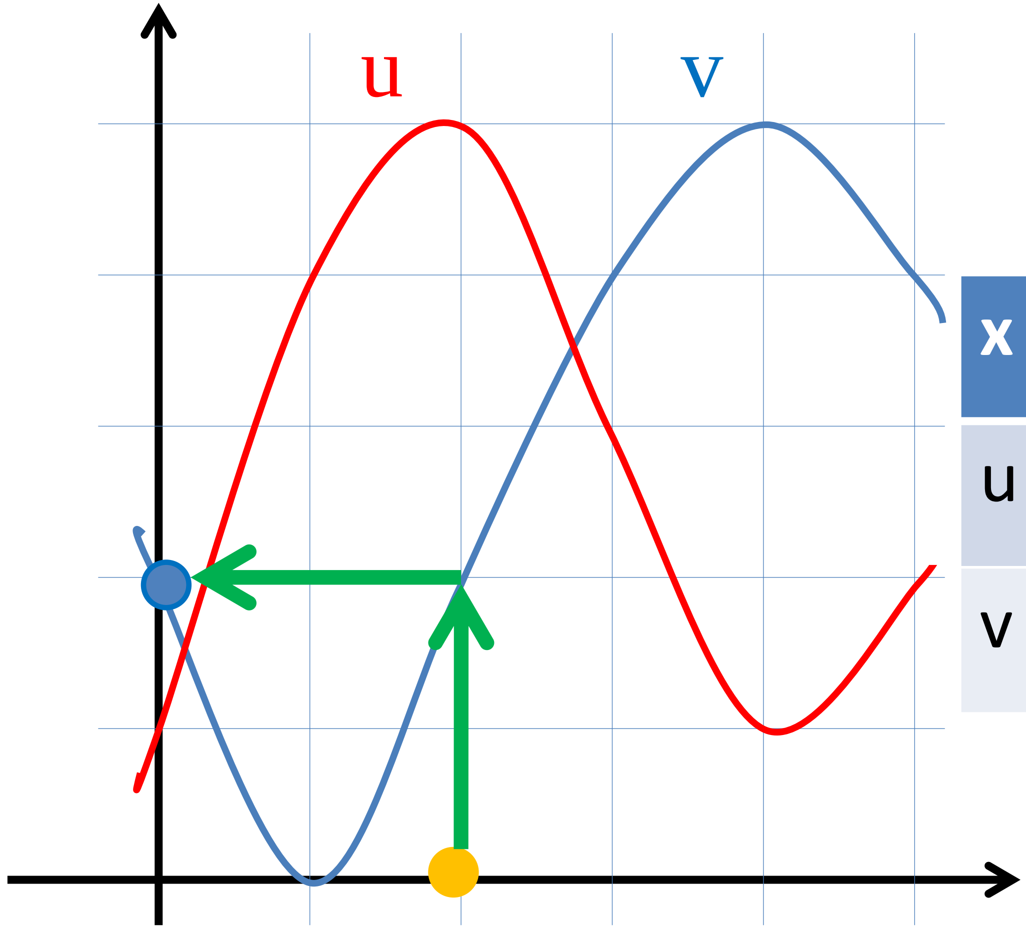


x	0	1	2	3
u o v (x)	5	1		
v o u (x)				

$u \circ v(0) = u(v(0))$ $\quad v(0) = 2$ $\quad u(2) = 5$

$u \circ v(1) = u(v(1))$ $\quad v(1) = 0$ $\quad u(0) = 1$

$u \circ v(2) = u(v(2))$ $\quad v(2) = 2$

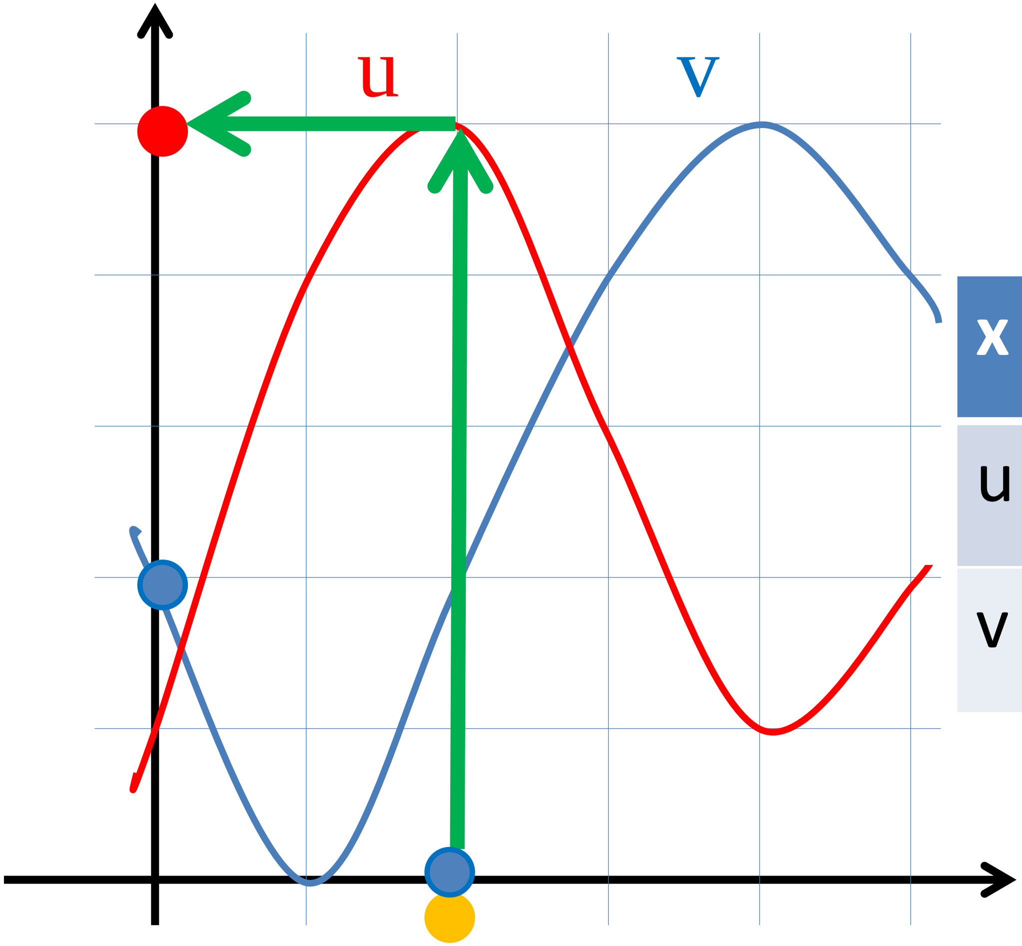


x	0	1	2	3
$u \circ v(x)$	5	1		
$v \circ u(x)$				

u o v (0) = u (v(0))   v(0) = 2   u(2) = 5

u o v (1) = u (v(1))   v(1) = 0   u(0) = 1

u o v (2) = u (v(2))   v(2) = 2   u(2) = 5



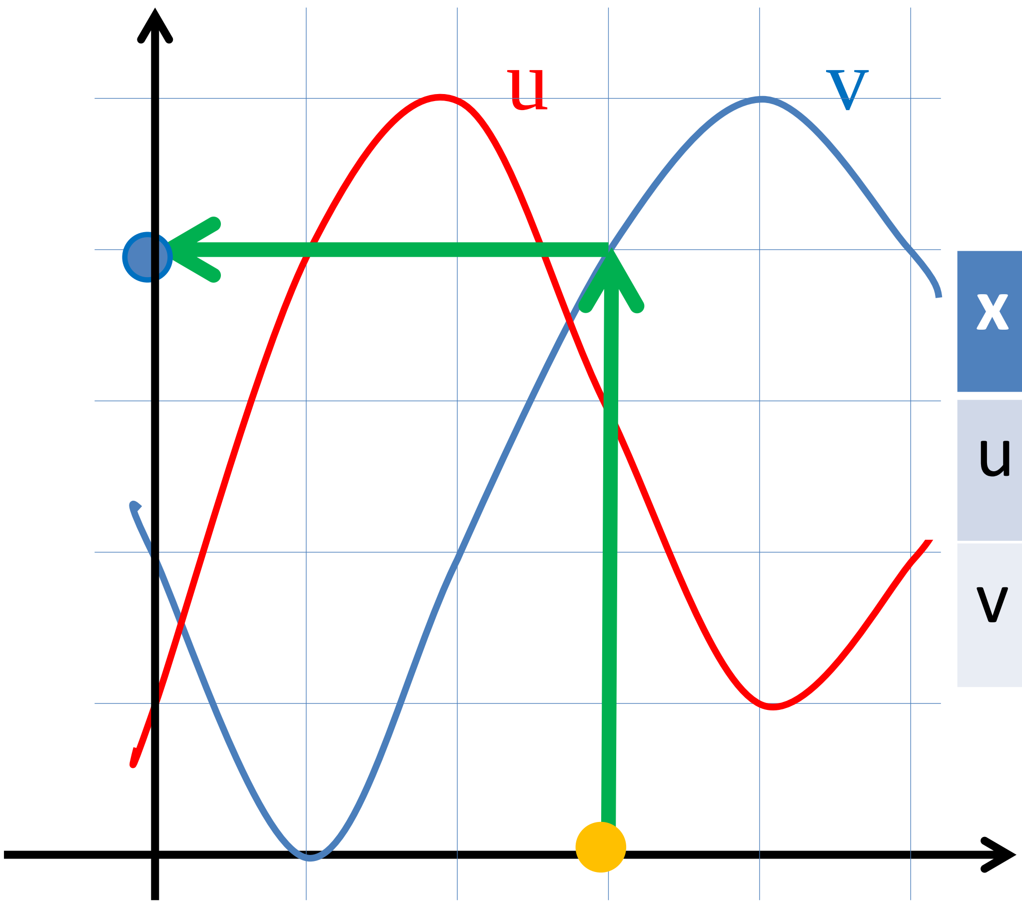
x	0	1	2	3
u o v (x)	5	1	5	
v o u (x)				

$u \circ v(0) = u(v(0))$ $\quad v(0) = 2 \quad u(2) = 5$

$u \circ v(1) = u(v(1))$ $\quad v(1) = 0 \quad u(0) = 1$

$u \circ v(2) = u(v(2))$ $\quad v(2) = 2 \quad u(2) = 5$

$u \circ v(3) = u(v(3))$ $\quad v(3) = 4$



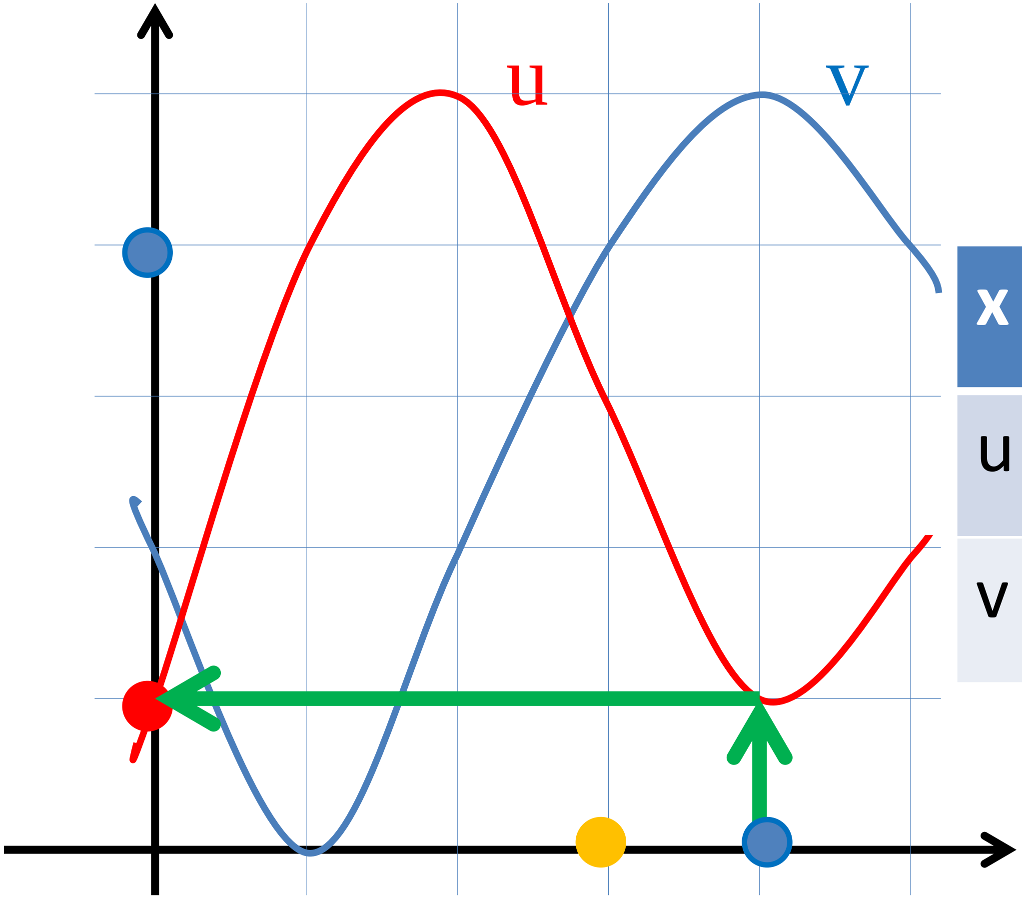
x	0	1	2	3
u o v (x)	5	1	5	
v o u (x)				

u o v (0) = u (v(0))   v(0) = 2   u(2) = 5

u o v (1) = u (v(1))   v(1) = 0   u(0) = 1

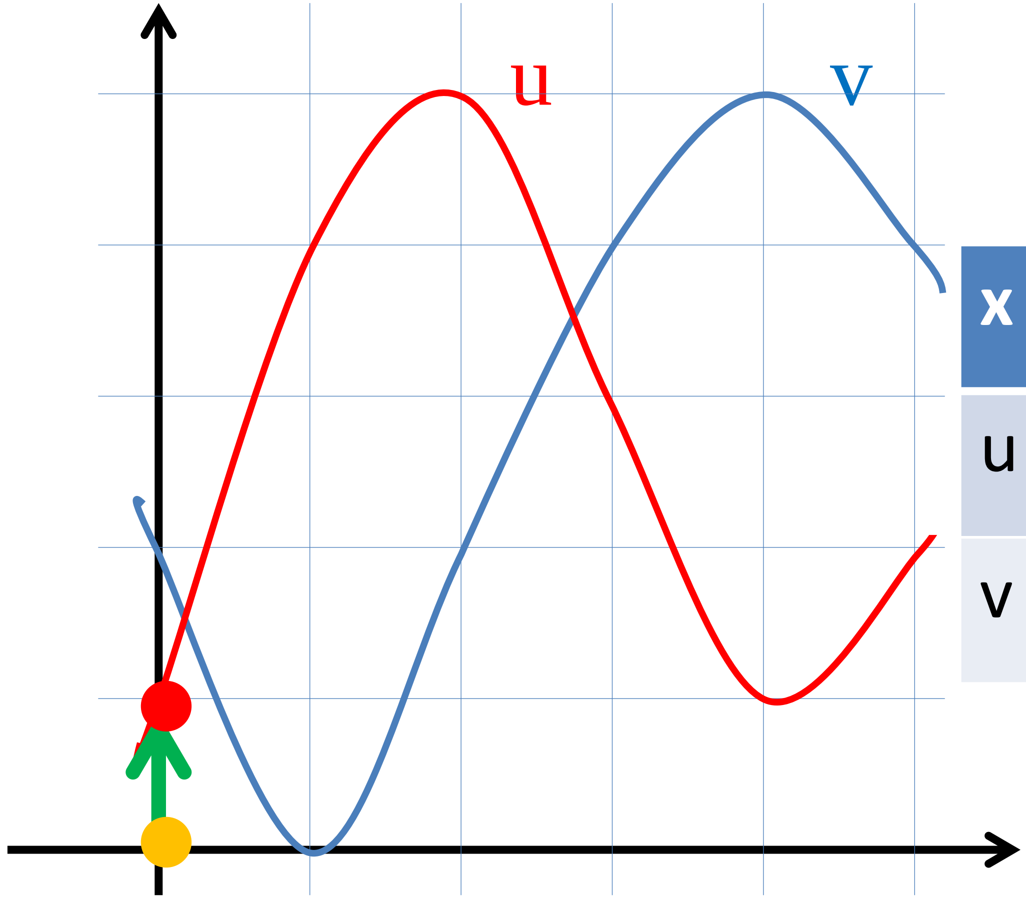
u o v (2) = u (v(2))   v(2) = 2   u(2) = 5

u o v (3) = u (v(3))   v(3) = 4   u(4) = 1



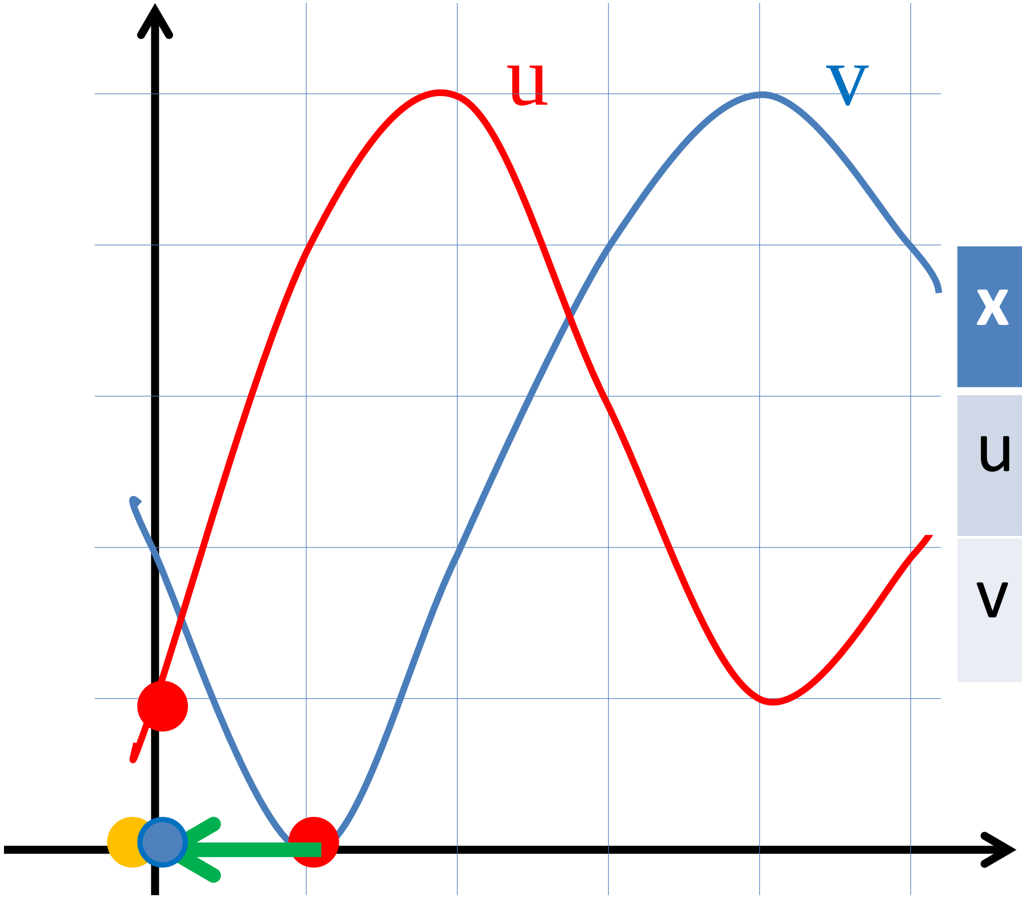
x	0	1	2	3
u o v (x)	5	1	5	1
v o u (x)				

v o u (0) = v (u(0))   u(0) = 1



x	0	1	2	3
u o v (x)	5	1	5	1
v o u (x)				

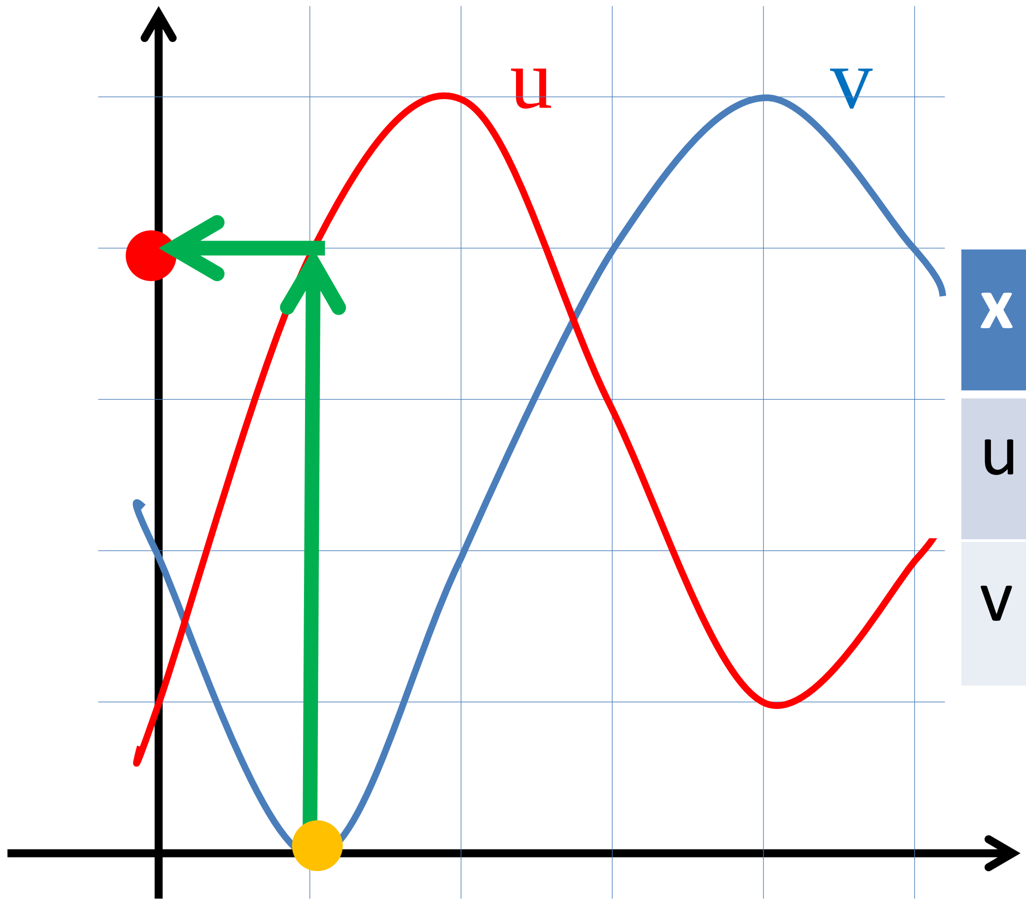
v o u (0) = v (u(0))   u(0) = 1   v(1) = 0



x	0	1	2	3
u o v (x)	5	1	5	1
v o u (x)	0			

$v \circ u\,(0) = v\,(u(0))$ $u(0) = 1$ $v(1) = 0$

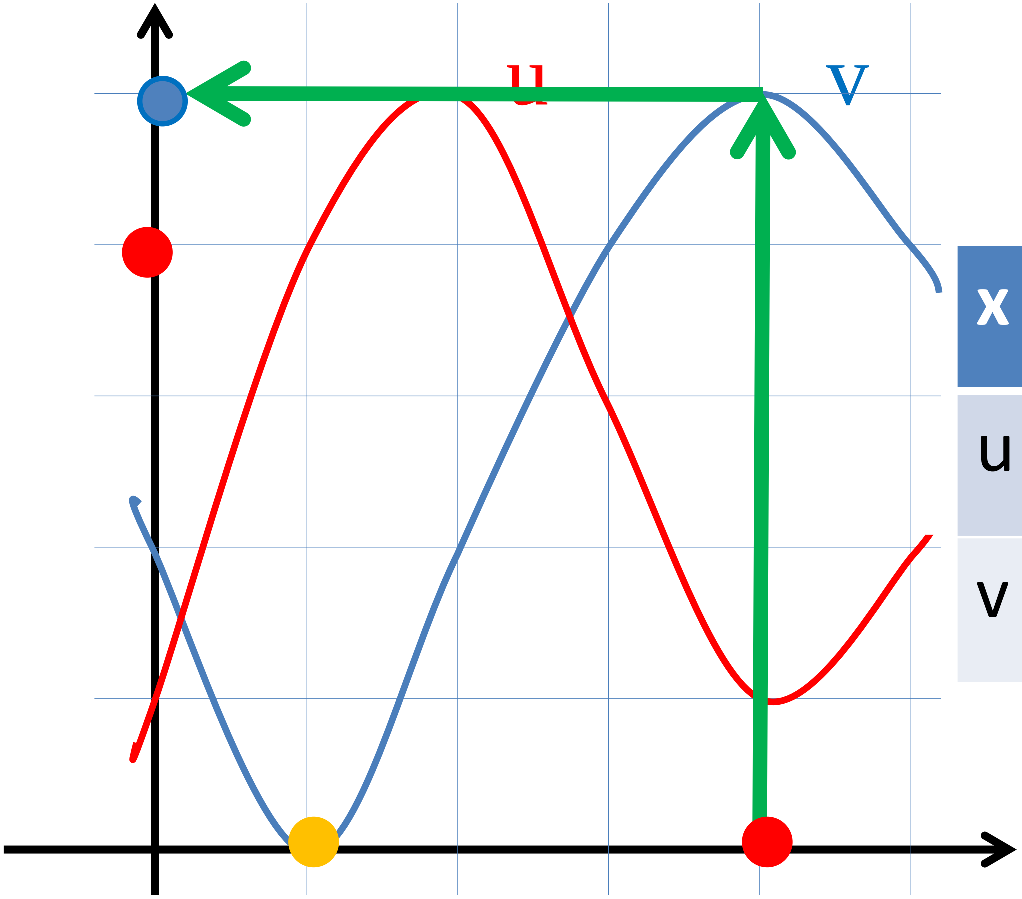
$v \circ u\,(1) = v\,(u(1))$ $u(1) = 4$



x	0	1	2	3
u o v (x)	5	1	5	1
v o u (x)	0			

v o u (0) = v (u(0)) u(0) = 1 v(1) = 0

v o u (1) = v (u(1)) u(1) = 4 v(4) = 5

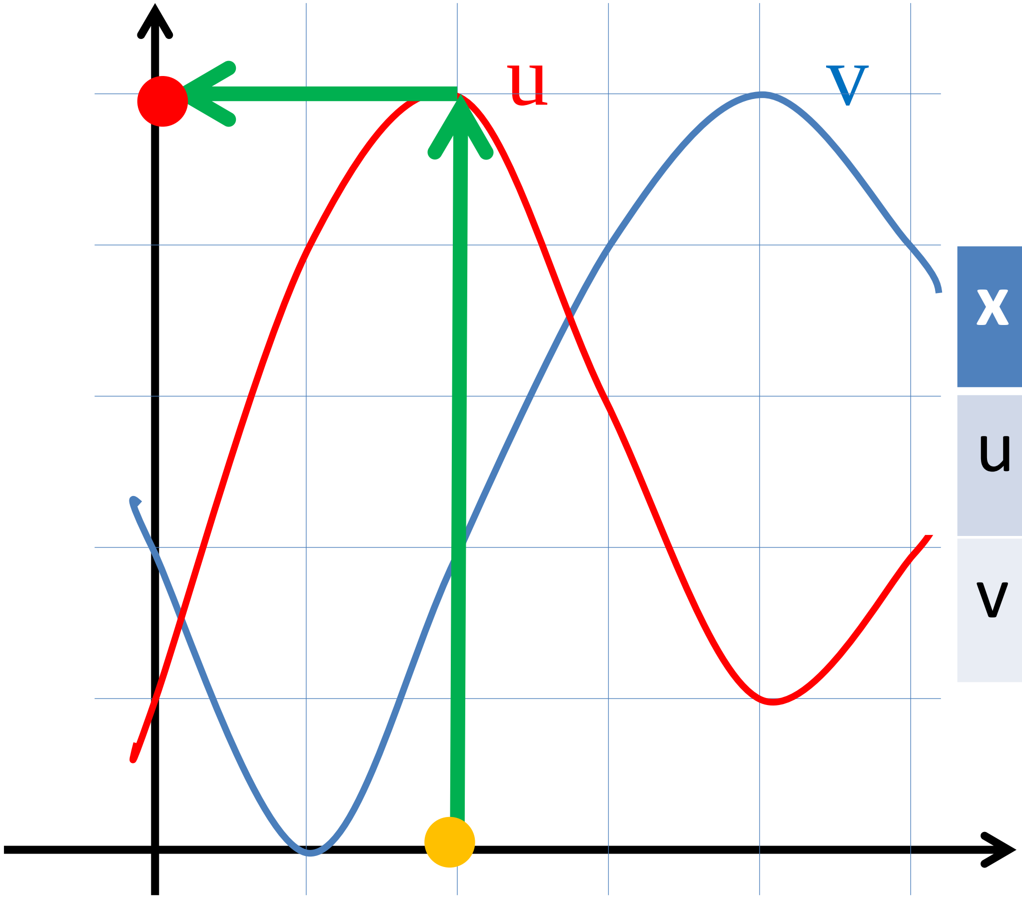


x	0	1	2	3
u o v (x)	5	1	5	1
v o u (x)	0	5		

$v \circ u\,(\,0\,) = v\,(\,u(0)\,)$ $u(0) = 1$ $v(1) = 0$

$v \circ u\,(\,1\,) = v\,(\,u(1)\,)$ $u(1) = 4$ $v(4) = 5$

$v \circ u\,(\,2\,) = v\,(\,u(2)\,)$ $u(2) = 5$

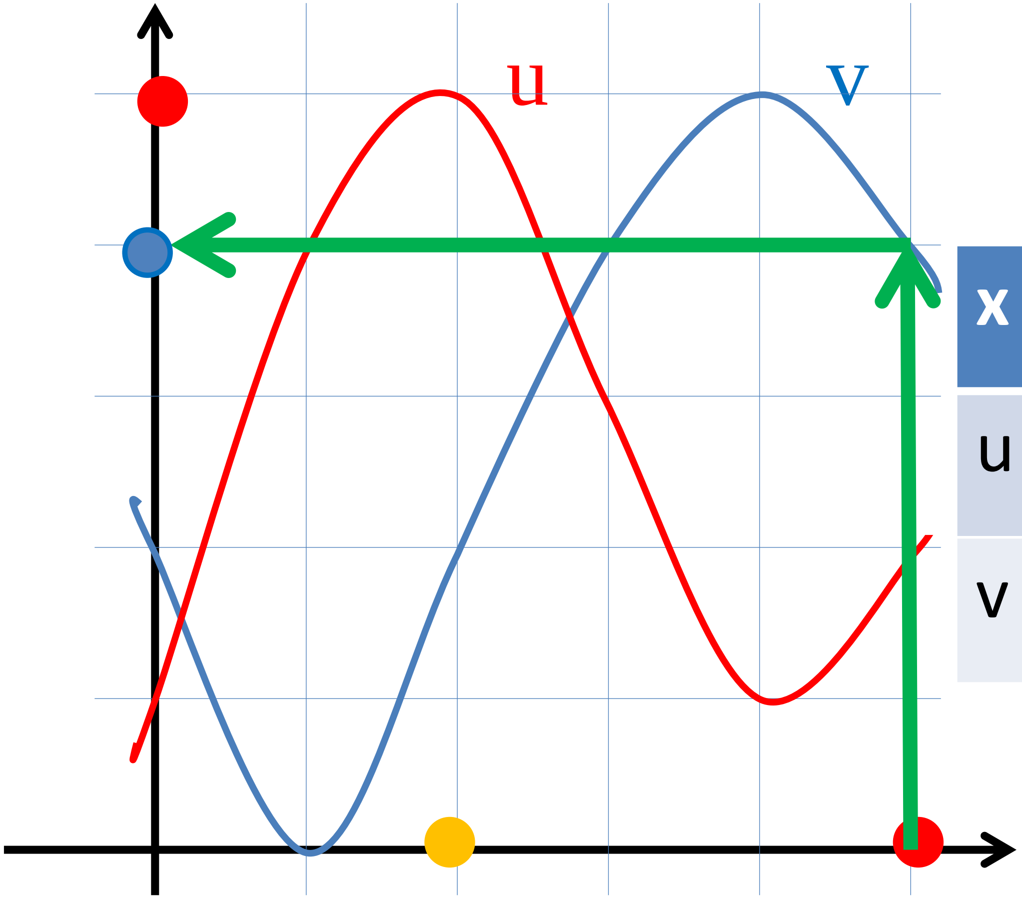


x	0	1	2	3
$u \circ v\,(x)$	5	1	5	1
$v \circ u\,(x)$	0	5		

$v \circ u(0) = v(u(0))$ $\quad u(0) = 1$ $\quad v(1) = 0$

$v \circ u(1) = v(u(1))$ $\quad u(1) = 4$ $\quad v(4) = 5$

$v \circ u(2) = v(u(2))$ $\quad u(2) = 5$ $\quad v(5) = 4$



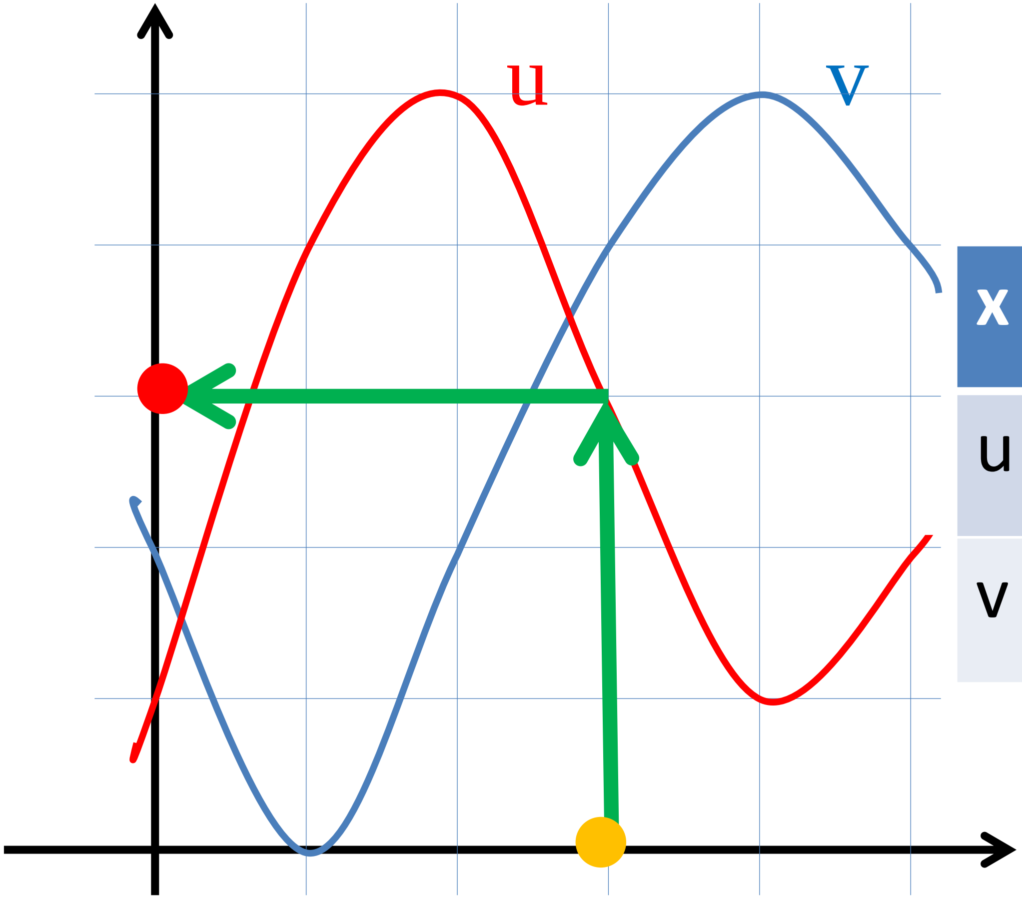
x	0	1	2	3
u o v (x)	5	1	5	1
v o u (x)	0	5	4	

$v \circ u(0) = v(u(0))$ $\quad u(0) = 1$ $\quad v(1) = 0$

$v \circ u(1) = v(u(1))$ $\quad u(1) = 4$ $\quad v(4) = 5$

$v \circ u(2) = v(u(2))$ $\quad u(2) = 5$ $\quad v(5) = 4$

$v \circ u(3) = v(u(3))$ $\quad u(3) = 3$



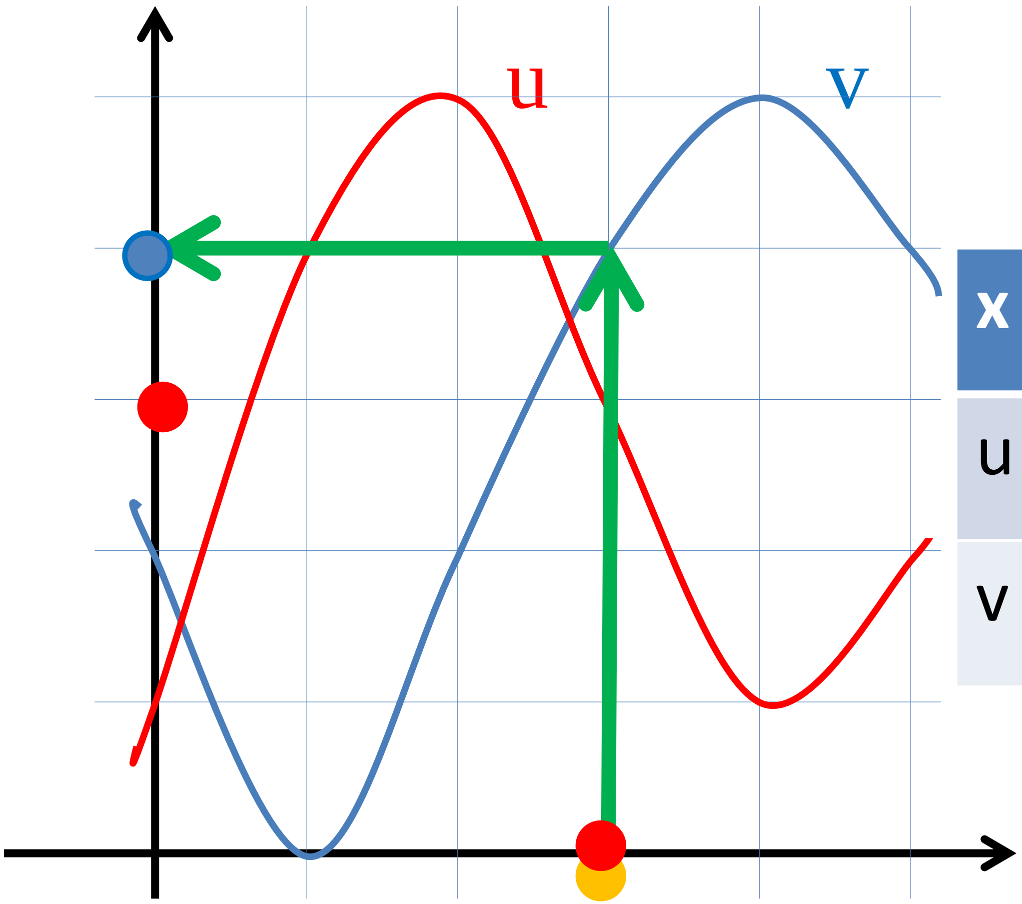
x	0	1	2	3
u o v (x)	5	1	5	1
v o u (x)	0	5	4	

v o u (0) = v (u(0))   u(0) = 1   v(1) = 0

v o u (1) = v (u(1))   u(1) = 4   v(4) = 5

v o u (2) = v (u(2))   u(2) = 5   v(5) = 4

v o u (3) = v (u(3))   u(3) = 3   v(3) = 4



x	0	1	2	3
u o v (x)	5	1	5	1
v o u (x)	0	5	4	4

Exercice 3 :

La composée de deux fonctions affines est-elle une fonction affine ?

Exercice 3 :

La composée de deux fonctions affines est-elle une fonction affine ?

Soit u la fonction affine définie sur les réels par $u(x) = ax + b$

idem $v(x) = mx + p$

Exercice 3 :

La composée de deux fonctions affines est-elle une fonction affine ?

Soit u la fonction affine définie sur les réels par $u(x) = ax + b$

idem $v(x) = mx + p$

$u \circ v\,(x) = u\,(\,v(x)\,)$

Exercice 3 :

La composée de deux fonctions affines est-elle une fonction affine ?

Soit u la fonction affine définie sur les réels par $u(x) = ax + b$

idem $v(x) = mx + p$

$u \circ v\,(x) = u\,(\,v(x)\,) = a\,v(x) + b$

Exercice 3 :

La composée de deux fonctions affines est-elle une fonction affine ?

Soit u la fonction affine définie sur les réels par $u(x) = ax + b$

idem $v(x) = mx + p$

$$u \circ v\,(x) = u(\,v(x)\,) = a\,v(x) + b$$

$$= a\,(\,mx + p\,) + b$$

Exercice 3 :

La composée de deux fonctions affines est-elle une fonction affine ?

Soit u la fonction affine définie sur les réels par $u(x) = ax + b$

idem $v(x) = mx + p$

$$u \circ v\,(x) = u(\,v(x)\,) = a\,v(x) + b$$

$$= a\,(\,mx + p\,) + b = amx + ap + b$$

$$= (am)\,x + (ap + b) = Ax + B$$

Oui

Exercice 4 : Soient les fonctions définies sur les réels non nuls par

$u(x) = 2x + 5$ $\qquad v(x) = x^2$ $\qquad w(x) = \dfrac{1}{x}$

Exprimez les fct f à k comme composées des fct u, v ou w.

$f(x) = 2x^2 + 5$ $\qquad g(x) = \dfrac{2}{x} + 5$ $\qquad h(x) = \dfrac{1}{2x + 5}$

$j(x) = (\ 2x + 5\ )^2$ $\qquad k(x) = 2\ \dfrac{1}{x^2} + 5$

$u(x) = 2x + 5$ $\qquad v(x) = x^2$ $\qquad w(x) = \dfrac{1}{x}$

Exprimez les fct f à k comme composées des fct u, v ou w.

$f(x) = 2x^2 + 5$

$u(x) = 2x + 5 \qquad v(x) = x^2 \qquad w(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = 2x^2 + 5 = 2\,(\,x^2\,) + 5 = u(\,x^2\,) = u(\,v(x)\,) = u \circ v\,(x)$

$f = u \circ v$

$g(x) = \dfrac{2}{x} + 5$

$u(x) = 2x + 5 \qquad v(x) = x^2 \qquad w(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f(x) = 2x^2 + 5 = 2\,(\,x^2\,) + 5 = u(\,x^2\,) = u(\,v(x)\,) = u \circ v\,(x)$$

$$f = u \circ v$$

$$g(x) = \frac{2}{x} + 5 = 2\,\frac{1}{x} + 5 = u\left(\frac{1}{x}\right) = u(\,w(x)\,) = u \circ w\,(x)$$

$$g = u \circ w$$

$$h(x) = \frac{1}{2x + 5}$$

$$u(x) = 2x + 5 \qquad v(x) = x^2 \qquad w(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = 2x^2 + 5 = 2\,(\,x^2\,) + 5 = u(\,x^2\,) = u(\,v(x)\,) = u \circ v\,(x)$$

$$f = u \circ v$$

$$g(x) = \frac{2}{x} + 5 = 2\,\frac{1}{x} + 5 = u\left(\frac{1}{x}\right) = u(\,w(x)\,) = u \circ w\,(x)$$

$$g = u \circ w$$

$$h(x) = \frac{1}{2x+5} = \frac{1}{u(x)} = w\,(\,u(x)\,) = w \circ u\,(x) \qquad h = w \circ u$$

$u(x) = 2x + 5$ $\quad$ $v(x) = x^2$ $\quad$ $w(x) = \dfrac{1}{x}$

$j(x) = (\ 2x + 5\ )^2$

$k(x) = 2\dfrac{1}{x^2} + 5$

$u(x) = 2x + 5$ $\quad$ $v(x) = x^2$ $\quad$ $w(x) = \dfrac{1}{x}$

$j(x) = (\ 2x + 5\ )^2 = (\ u(x)\ )^2 = v(\ u(x)\ ) = v \circ u\ (x)$

$j = v \circ u$

$k(x) = 2\dfrac{1}{x^2} + 5$

$$u(x) = 2x + 5 \qquad v(x) = x^2 \qquad w(x) = \frac{1}{x}$$

$$j(x) = (\ 2x + 5\ )^2 = (\ u(x)\ )^2 = v(\ u(x)\ ) = v \circ u\ (x)$$

$$j = v \circ u$$

$$k(x) = 2\,\frac{1}{x^2} + 5 = u\left(\frac{1}{x^2}\right) = u(\ w(x^2)\ ) = u(\ w(\ v(x)\ )\ )$$

$$k = u \circ w \circ v$$